

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Л.А.ВУЛИС
Ш.А.ЕРШИН
Л.П.ЯРИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЗОВОГО ФАКЕЛА



Л.А.ВУЛИС
Ш.А.ЕРШИН
Л.П.ЯРИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЗОВОГО ФАКЕЛА

Под редакцией
Л. А. ВУЛИСА



«ЭНЕРГИЯ»
Ленинградское отделение
1968

В книге изложены основы аэродинамической теории и методов расчета прямотруйного газового факела. Освещены вопросы структуры течения и турбулентного горения неперемешанных газов и вопросы теплового режима факела (устойчивость горения, потухание и др.) Рассмотрены также некоторые специальные задачи теории факела — расчет высокоскоростного горения, взаимодействие факела с электромагнитным полем.

Книга предназначена для инженеров — теплофизиков, энергетиков и механиков, работающих в области исследования, конструирования и наладки топочных устройств и в смежных областях. Она может быть полезна аспирантам и студентам теплофизических и теплотехнических специальностей.

3-3-2

13-68

ВУЛИС ЛЕВ АБРАМОВИЧ,
ЕРШИН ШАХБАЗ АЛИМГИРЕЕВИЧ,
ЯРИН ЛЕОНИД ПЕТРОВИЧ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЗОВОГО ФАКЕЛА

Редактор **Р. М. Бартоменко**
Художественный редактор **Г. А. Гудков**
Техн. редактор **О. С. Житникова**
Корректор **Е. С. Барбан**

Сдано в производство 13/XI 1967 г. Подписано к печати 19/II 1968 г. М-17073. Печ. п. 12,75. Уч.-изд. л. 13,8. Бум. л. 6,37. Бумага типографская № 1 60×90¹/₁₆. Тираж 5000 экз. Цена 1 р. 57 к. Заказ 2565.
Ленинградское отделение издательства «Энергия»
Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 4 Главополиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Социалистическая, 14.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГОРЕНИЕ НЕПЕРЕМЕШАННЫХ ГАЗОВ

Глава первая. Диффузионный факел	7
1-1. О горении перемешанных газов	—
1-2. Расчет ламинарного факела	11
1-3. Факел в переходной области течения	23
1-4. О методе эквивалентной задачи	27
Глава вторая. Расчет турбулентного факела	34
2-1. О расчете диффузионного факела	—
2-2. Плоский фронт пламени	40
2-3. Факел конечного размера	48
Глава третья. Экспериментальные данные	56
3-1. Затопленный факел	—
3-2. Факел в спутном потоке	67
3-3. Пример расчета факела	74
Глава четвертая. Коаксиальные турбулентные струи и факел	79
4-1. Коаксиальные газовые струи	—
4-2. О влиянии турбулентного перемешивания на длину факела	85
4-3. Коаксиальный газовый факел	91

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГОРЕНИЕ ПРИ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РЕАКЦИЙ

Глава пятая. Турбулентное горение газа	99
5-1. Квазигетерогенная схема газового факела	—
5-2. О расчете по методу подобия Re^2	102
5-3. О влиянии температурных пульсаций на макрокинетику турбулентного горения	104
Глава шестая. Тепловой режим диффузионного факела	109
6-1. Плоский фронт пламени	—
6-2. Критические условия воспламенения и потухания	119
6-3. Факел конечного размера	124
Глава седьмая. Горение однородной газовой смеси	128
7-1. О расчете турбулентного факела	—
7-2. Газодинамический расчет фронта пламени	132
7-3. Расчет факела по скорости турбулентного горения	137
7-4. Тепловой режим гомогенного факела	141

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФАКЕЛА

Глава восьмая. Диффузионное горение в высокоскоростном потоке	149
8-1. Расчет ламинарного факела	—
8-2. Расчет турбулентного факела	156
Глава девятая. Диффузионный факел в электромагнитном поле	160
9-1. Расчет факела в магнитном поле	—
9-2. Расчет факела в скрещенных полях	170
Глава десятая. Об электро моделировании турбулентного факела	173
10-1. Сущность метода	—
10-2. Некоторые результаты эксперимента	177
Приложение	189
Литература	199

ПРЕДИСЛОВИЕ

Много лет назад в беседе с учениками (в числе которых был пишущий эти строки) о новой тогда теории турбулентных струй Георгий Федорович Кнорре назвал ее хорошей основой для изучения факела. В более поздние годы он не раз возвращался к этому и говорил, что в сочетании методов теории струй и теплового режима горения видит надежный путь для создания теории факела.

Предлагаемая вниманию читателя монография — скромный отрезок на этом пути. В полном объеме задача еще далека от завершения. И, может быть, поэтому следует надеяться, что попытка изложения теоретического и экспериментального материала с единых позиций поможет развитию одного из важных вопросов теории горения, окажется полезной исследователю, инженеру и учащемуся.

Настоящая книга посвящена развитию аэродинамической теории, прямоструйного газового факела. Принятый в ней метод исследования и некоторые результаты имеют более общий характер и, вероятно, представляют интерес для теории горения и топочного процесса в целом.

Аэродинамической теорией горения принято называть направление исследования, выдвигающее на первый план изучение закономерностей движения горящего потока и соответствующих ему процессов переноса импульса, вещества и энергии [Л. 1; 24; 27 и др.]. Аэродинамике горения в чистом виде наиболее отвечает предельная схема, при которой скорость химических реакций считается бесконечно большой. В этом приближении удастся для сравнительно простых случаев рассчитать подробную картину распределения в потоке основных аэродинамических величин — скорости течения, температуры, концентраций реагирующих веществ и т. д. Вопросы устойчивости горения, стабилизации его, воспламенения и срыва при такой постановке задачи, естественно, не рассматриваются. Более того, из числа расчетных характеристик в предположении совершенного смешения практически исключается полнота сгорания.

Более полное исследование факела становится возможным при сочетании представлений об аэродинамике потока и тепловом

режиме горения. Получение достаточно общих и наглядных результатов на этом пути связано с сильной схематизацией закономерностей химической кинетики и учетом одних только наиболее специфических свойств экзотермических реакций [Л. 21; 27; 47; 56; 89]. При этом, и в первую очередь при учете резкой температурной зависимости скорости реакции, становится возможным наряду с выявлением аэродинамической структуры потока найти пределы существования устойчивого горения, определить полноту сгорания, критические условия воспламенения и потухания и др.

Оба подхода к исследованию процесса горения — при бесконечно большой или конечной скорости реакции — применяются в этой книге к изучению газового факела. Выбор его в качестве объекта исследования объясняется, с одной стороны, практическим значением газового факела самого по себе и в виде основы факельного способа сжигания любого топлива. С другой стороны, общность аэродинамической структуры факела и газовых струй¹ и процессов переноса в них позволяет эффективно использовать при исследовании факела методы и результаты теории турбулентных струй — одного из наиболее развитых разделов прикладной газовой динамики [Л. 1; 10; 22]. Это относится к так называемому диффузионному факелу (горение неперемешанных газов), а также к гомогенному факелу (горение однородной смеси).

В обоих случаях при напряженном, высокоинтенсивном горении область, в которой происходит сгорание основной доли горючих компонентов, занимает сравнительно малую часть факела. В пределе зона горения столь узка, что ее можно заменить поверхностью фронта пламени. Это представление, обычное для горения с бесконечно большой скоростью реакций, может быть с известным приближением сохранено и для реакций с конечной скоростью. В результате при квазигетерогенной схеме процесса горение считается локализованным на поверхности фронта пламени. Предположение об отсутствии химических реакций во всем объеме факела существенно упрощает математическое описание процесса. В ряде случаев становится возможным аналитическое решение задачи, конечные результаты которого правильно отражают все наиболее важные физические свойства явления.

Отметим также другие допущения, принятые в книге. В основном она ориентирована на изучение интенсивного свободного прямоструйного газового факела применительно к условиям сжигания углеводородного топлива в воздухе — в энергетических установках, т. е. при умеренных значениях температуры. Это позволяет не рассматривать в ней кинетического горения (точнее окисления), для которого характерно сравнительно медленное протекание реакций во всем объеме струй, и не учитывать излучения, влияние

¹ Т. е. одинаковый механизм процессов переноса в струях и факеле, связанный прежде всего с общей причиной — передачей импульса окружающей среде и вовлечением ее в движение.

которого на процесс горения существенно вблизи границ воспламенения и срыва, а также диссоциации и ионизации газа, изменения числа молей (и теплоемкости) при сгорании, эффектов термо- и бародиффузии и диффузионной теплопроводности.

Для достаточно большой, но вместе с тем малой по сравнению со скоростью звука, скорости течения можно пренебречь свободной конвекцией и теплотой трения.

При анализе течения в факеле предполагается, что газ вытекает из профилированного сопла, скорость его на выходе направлена строго по оси течения, возмущения поля давления пренебрежимо малы.

Эти ограничения заметно упрощают рассмотрение вопроса. Отдельные из них могут быть отброшены при численном решении конкретных задач с помощью ЭВМ. Существенно, однако, что они отвечают в основном условиям эксперимента, рассмотренного в книге и использованного в качестве критерия допустимости теоретических предположений и правильности результатов расчета.

Отдельные важные вопросы современной теории горения — кинетика реакций горения, теория нормального и турбулентного распространения пламени, излучение пламени, методика диагностики и измерений и другие, изложенные в монографиях по физике горения и теории топочных процессов [Л. 12; 51; 55; 56; 60; 79; 89; 100] и ряде сборников [Л. 68; 71; 73 и др.], — в книге не обсуждаются или затрагиваются в той мере, в какой это требуется по ходу изложения.

Подробно не излагаются также расчетные методы теории струй и их обоснование, поскольку они рассмотрены в специальных монографиях [Л. 1; 10; 22]. Наряду с этим решения наиболее характерных задач приводятся с достаточными для воспроизведения основных результатов подробностями. В особенности это относится к расчету диффузионного (затопленного и спутного) факела конечного размера, для которого указан порядок приближенного инженерного расчета и приведены в приложении вспомогательные таблицы функций.

Хотя оглавление в достаточной мере отражает содержание книги, охарактеризуем кратко особенности ее построения.

Первая часть¹ посвящена аэродинамике диффузионного факела при бесконечно большой скорости реакции. Теория вопроса в ней наиболее полно сочетается с опытом; конечные выводы проверяются на эксперименте. Поэтому результаты этой части доведены до практического расчета, основанного на ряде допущений и привлечении минимального числа эмпирических данных.

Вторая часть содержит исследование горения неперемешанных газов и однородной смеси, выполненное с учетом конечной скорости

¹ Для удобства чтения в книге принята сплошная нумерация глав и двойная для параграфов, рисунков, формул и таблиц (первый индекс указывает на главу, второй — на порядковый номер параграфа, рисунка, формулы и таблицы в этой главе).

химических реакций. Материал этой части носит более качественный характер, однако несколько глубже связан с физической картиной горения газа в турбулентном факеле, поскольку не ограничен одними аэродинамическими представлениями.

В третьей части рассматриваются в порядке постановки отдельные вопросы — расчеты простейших форм высокоскоростного факела и факела в электромагнитном поле. В ней обсуждается также применение электро моделирования турбулентного горения. Как показывают первые результаты эксперимента, этот метод при развитии и практическом осуществлении может явиться ценным подспорьем в исследовании.

Заметим, наконец, что приведенный в конце книги перечень литературы не является исчерпывающим. В нем указаны исследования, использованные в тексте, а также обзорные работы и монографии, содержащие подробные библиографические данные.

Наиболее подробно в книге отражены результаты работ, выполненных авторами и в основном опубликованных за последние десять лет. При включении в монографию эти работы были пересмотрены и замеченные недочеты устранены. В частности, переработке подвергся расчет диффузионного факела конечного размера.

Большинство опытов, описанных в тексте, и расчетов выполнено моими товарищами, в прошлом учениками Ш. А. Ершиным, Л. П. Яриным. В целом книга — от замысла до осуществления — наш общий труд.

Авторы благодарны товарищам, участвовавшим в отдельных этапах исследований, рецензенту И. И. Палееву за полезные замечания, а также Б. Д. Кацнельсону за обсуждение рукописи.

Отзывы и пожелания по книге просьба посылать по адресу: Ленинград, Д-41, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение издательства «Энергия».

Л. А. Вулис

ГОРЕНИЕ НЕПЕРЕМЕШАННЫХ ГАЗОВ

Глава первая ДИФфуЗИОННЫЙ ФАКЕЛ

1-1. О горении неперемешанных газов

Сжигание предварительно не перемешанных компонентов горючей смеси (топлива и окислителя) представляет собой наиболее распространенный в технике способ организации топочного процесса. При интенсивном горении, протекающем при достаточно высокой температуре, скорость химических реакций настолько возрастает, что сколь-нибудь длительное существование смеси топлива и окислителя становится невозможным. Это означает, что в тех местах, где встречаются молекулы реагентов, возникает практически мгновенно интенсивная химическая реакция — горение. В этих условиях для интенсификации горения следует воздействовать на смешение, поскольку именно оно лимитирует скорость процесса в целом. Только при очень большой скорости подвода реагентов может наступить такой режим, при котором скорость реакции окажется меньше скорости диффузии и в зоне горения будет находиться некоторое количество несгоревшей смеси. Вследствие этого произойдет снижение температуры горения, что, в свою очередь, приведет к уменьшению скорости реакций, дальнейшему снижению температуры и т. д., вплоть до потухания.

В этой части книги рассмотрим предельный случай горения, при котором можно полагать скорость реакций бесконечно большой по сравнению со скоростью диффузии, концентрацию реагентов в зоне горения равной нулю, а саму зону — поверхностью фронта пламени. Такой вид горения неперемешанных газов принято называть диффузионным.

Диффузионное горение издавна привлекало к себе внимание исследователей. По-видимому, первым изучал его в связи с разработкой пламенных печей крупный инженер и ученый В. Е. Грум-Гржимайло [Л. 36]. Большую известность среди теплотехников получила в свое время работа Руммеля [Л. 116], посвященная

изучению смешения газов в топочной камере. В этих и ряде других работ было высказано предположение о том, что стационарный фронт пламени устанавливается там, где при холодном (инертном) смешении компонентов образуется стехиометрическая смесь. Это допущение физически не строго, поскольку процесс горения оказывает заметное влияние на смешение газов. Оно, однако, может быть использовано в качестве первого приближения при ориентировочной оценке местоположения фронта горения.

Как было показано Я. Б. Зельдовичем [Л. 47], при горении неперемешанных газов фронт пламени устанавливается в тех точках, где подходящие к фронту потоки реагентов находятся в стехиометрическом соотношении. Действительно, если в зону горения один из реагентов поступит в избытке, то через фронт пламени начнет проходить часть топлива или окислителя, не принявшая участие в реакции. Попад в область другого реагента, эта часть топлива (или окислителя), разогретая при прохождении фронта пламени, вступит в реакцию. Это приведет к уменьшению количества второго компонента, поступающего в зону горения, и перемещению фронта пламени до тех пор, пока потоки реагентов, подходящие с обеих сторон фронта, не окажутся в стехиометрическом соотношении.

На основе представлений об определяющей роли смешения при горении неперемешанных газов некоторые исследователи проводили теоретический анализ закономерностей развития ламинарного и турбулентного диффузионного факела. Простейшая модель горения неперемешанных газов была подробно рассмотрена в известной работе Бурке и Шумана [Л. 108], изучавших горение параллельных потоков топлива и окислителя, движущихся с одинаковыми скоростями. Полученные в предположении бесконечно большой скорости реакции зависимости, определяющие конфигурацию и длину факела, оказались в удовлетворительном качественном соответствии с опытом. Заметим, что основные результаты теории Бурке и Шумана могут быть с точностью до множителя получены из соображений размерности [Л. 21; 88]. Недостатком работы [Л. 108] является ограниченность ее в аэродинамическом смысле. Принятой постановке задачи отвечает течение, в котором отсутствует поперечный градиент скорости. Несмотря на это, проведенный авторами [Л. 108] анализ явления и сопоставление расчета с экспериментом позволили выявить ряд существенных особенностей диффузионного горения.

В аналогичной постановке задача о ламинарном горении неперемешанных газов рассматривалась другими исследователями [Л. 92]. Наиболее общий анализ горения неперемешанных газов выполнен Я. Б. Зельдовичем [Л. 47]. В этой работе сформулировано условие смешения потоков реагентов в стехиометрической пропорции при диффузионном горении, а также показано, что температура на фронте (без учета потерь) равна адиабатической температуре горения стехиометрической смеси. Это было подтверждено прямыми спектроскопическими измерениями [Л. 20].

При увеличении скорости истечения газа (числа Рейнольдса Re) происходит разрушение ламинарного пламени и образование развитого турбулентного. Характерной особенностью турбулентного факела является значительное расширение по сравнению с ламинарным пространственной области смещения и, соответственно, зоны, в которой протекает интенсивная химическая реакция. Это связано с тем, что интенсивность процессов переноса при турбулентном течении существенно превышает интенсивность молекулярного обмена. Важно, что при этом относительный размер зоны реакций остается достаточно малым. Переход от ламинарного горения к турбулентному совершается не скачком, а постепенно в некоторой области чисел Re , разделяющих оба предельных случая между собой.

Исследованию диффузионного факела в переходной области течения посвящены работы ряда авторов [Л. 20; 83; 92; 96]. Как показали исследования, в ламинарной области длина факела пропорциональна скорости истечения. В переходной области наблюдается нелинейная зависимость длины факела от скорости. При определенных значениях скорости потока длина факела достигает максимального значения. Дальнейшее увеличение скорости ведет к уменьшению длины факела. В области развитого турбулентного движения длина факела практически не зависит от скорости истечения газа (подробнее см. § 1-3).

В перечисленных работах содержатся также интересные данные по турбулизации и устойчивости диффузионных пламен в переходной области течения. В частности, заслуживает упоминания обнаруженный в работе [Л. 96] гистерезисный характер воспламенения и потухания диффузионного факела. Аналогичные результаты были получены в работе [Л. 11].

Одна из первых серьезных попыток построения теории турбулентного диффузионного факела принадлежит В. А. Швабу [Л. 93], который с позиций теории свободных струй впервые развил общую, в основном правильную схему процесса.

Для упрощения расчета В. А. Шваб исходит из предположения о подобии полей скорости, концентраций и температуры в факеле. Это было бы справедливо, если бы значения коэффициентов турбулентного переноса количества движения, тепла и вещества численно совпадали. В действительности численные значения характеристик турбулентного обмена (вязкости ν_t , температуропроводности α_t и диффузии D_t) различных субстанций неодинаковы. Поэтому в турбулентных потоках не наблюдается подобия динамических и температурных полей. Недостатком работы является неточное представление о характере изменения концентраций реагентов в поперечных сечениях факела. В. А. Шваб полагал, что значения концентраций реагентов в зоне горения конечны и на фронте пламени скачком падают к нулю. В действительности происходит плавное изменение концентраций в поперечных сечениях факела. При бесконечной скорости реакции значения концентраций окислителя

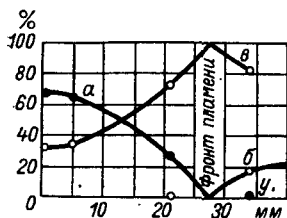
и топлива на фронте пламени равны нулю, а потоки реагентов, диффундирующих к фронту, находятся в стехиометрическом соотношении. Последнее и является условием, позволяющим определить местоположение фронта пламени.

В работе [Л. 33] содержится попытка аналитического расчета длины турбулентного диффузионного факела с учетом изменения молекулярного веса газа, а также изменения плотности его за счет подогрева в процессе горения. Полученное Хоттелем и другими [Л. 33] выражение для расчета длины факела удовлетворительно согласуется с экспериментом. Особый интерес представляет проведенное авторами этой работы экспериментальное исследование распределения концентраций в газовом факеле. Результаты этих

опытов, показанные на рис. 1-1, а также данные других авторов [Л. 13] подтверждают основные предпосылки аэродинамической теории газового факела.

В работе [Л. 101] приводится оценка длины факела по одномерной модели, основанной на диффузионном механизме процесса. Интересно указание на возможность обобщения расчета газового факела на случай факельного горения тонкодиспергированной угольной пыли. Проведенные авторами эксперименты показали удовлетворительную сходимость расчета с опытами по газовому и пылеугольному факелам.

Рис. 1-1. Распределение концентраций топлива (а), окислителя (б) и продуктов сгорания (в) в поперечном сечении диффузионного факела [Л. 33].



Приближенное уравнение для определения длины и формы факела содержится также в работе Барона [Л. 106]. Следуя Райхардту [Л. 114], автор полагает, что в турбулентных струях поперечные конвективные потоки количества движения, вещества и энтальпии пропорциональны продольному градиенту соответствующих величин (плотности потока импульса ρu^2 и др.). Такое допущение позволяет привести уравнения движения, энергии и диффузии к виду уравнения нестационарной одномерной теплопроводности. В результате удается найти распределение концентраций в поле течения турбулентной струи. Считая, что местоположение фронта пламени определяется условием смешения окислителя и топлива в стехиометрическом соотношении, Барон [Л. 106] получил формулу для определения длины факела, идентичную формуле Хоттеля. Хотя конечные результаты, полученные Бароном, повторяют результаты работы [Л. 33], однако сама постановка задачи отличается большей строгостью.

С несколько иных позиций автор работы [Л. 59] также приходит к уравнениям типа уравнения теплопроводности, которые в дальнейшем используются для расчета турбулентного факела.

Подробный газодинамический расчет турбулентного газового факела на основе теории турбулентных струй приведен в моногра-

фий Г. Н. Абрамовича [Л. 1]. Метод расчета сводится кратко к следующему. Неизвестные профили скорости и концентраций в поперечных сечениях факела заменяются некоторыми аппроксимирующими кривыми, удовлетворяющими граничным условиям на оси и внешней границе факела. В качестве таких аппроксимирующих кривых для расчета турбулентного факела используются кривые, определяемые известной формулой Шлихтинга [Л. 94] для следа за телом.

Основные характеристики факела — длина, форма, закономерности изменения скорости, концентрации, температуры по оси и другие — определяются с помощью интегральных соотношений. Автор справедливо указывает, что результаты такого приближенного расчета будут тем точнее, чем ближе аппроксимирующие функции соответствуют истинным профилям.

Наряду с попытками теоретического расчета в литературе приводится большое число эмпирических соотношений для определения длины турбулентного диффузионного факела [Л. 5; 53; 58; 97 и др.]. Применение их, как правило, ограничено условиями эксперимента.

Из исследований, посвященных изучению сравнительно сложных в аэродинамическом отношении турбулентных диффузионных факелов, упомянем работы [Л. 67; 86 и др.]. В первой из них с помощью теории подобия получено приближенное выражение для расчета длины факела, развивающегося в ограниченном пространстве. Во второй рассмотрен практически интересный случай, когда топливо и окислитель подаются в ограниченное пространство в виде раздельных струй. В основу анализа явления авторы этой работы положили физически не всегда обоснованные предположения (аналогичные сделанным в [Л. 14], упрощающие математическое решение задачи).

Кроме указанных в приведенном кратком обзоре основных исследований, в которых использованы методы, свойственные в той или иной степени аэродинамической теории факела, заслуживают упоминания работы, в которых развитие факела рассмотрено применительно к условиям протекания процесса горения в печах, камерах сгорания и др. [Л. 34; 48; 50; 56; 66 и др.].

1-2. Расчет ламинарного факела

В качестве вводной теоретической задачи рассмотрим ламинарное горение предварительно не перемешанных газов в свободном пограничном слое, образованном при смешении двух плоскопараллельных потоков топлива и окислителя [Л. 43].

Как и в других случаях, результаты исследования ламинарного факела, опирающиеся на физически строгие уравнения, свободные от введения эмпирических данных, служат качественной моделью расчета турбулентного диффузионного факела. Более того, физи-

ческая схема явления, общая постановка задачи, граничные условия, метод решения — все это в известных пределах одинаково для ламинарного и турбулентного факела. Поэтому для рассматриваемой ниже задачи выпишем подробно систему необходимых уравнений, граничных условий и все основные преобразования. Наряду с этим оговорим принятые допущения с тем, чтобы в дальнейшем, как правило, не повторять этого.

Схема течения показана на рис. 1-2. Примем, что по обе стороны полубесконечной пластины движутся без трения однородные потоки реагирующих газов, приходящие в соприкосновение в точке O (начало координат на рис. 1-2, а). Начиная от этой точки образуется область смешения — свободный пограничный слой,

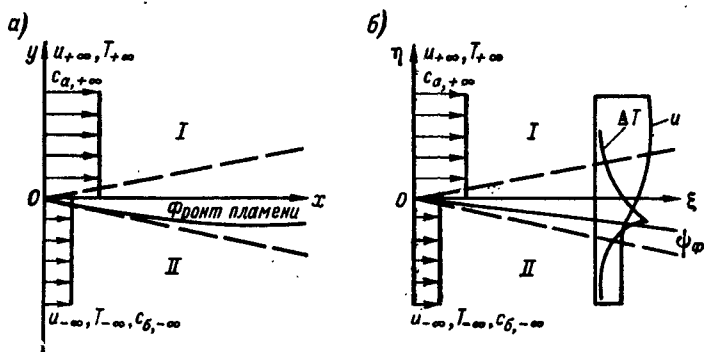


Рис. 1-2. Схема плоскопараллельного пограничного слоя при горении неперемешанных газов: а — плоскость физических координат x, y ; б — плоскость переменных ξ, η .

внутри которого располагается диффузионный фронт пламени. Стабильность его обеспечивается поджиганием по линии $x = 0, y = 0$. Скорости химических реакций горения будем считать бесконечно большими и в соответствии с этим зону горения — поверхностью фронта пламени. Тем самым принимаем, что во всем объеме, занятом факелом, реакции горения отсутствуют. Реагирующие газы поступают с обеих сторон к фронту и мгновенно сгорают на нем.

В задачу расчета входит определение местоположения фронта пламени и распределения температуры, скорости течения и концентраций топлива и окислителя, а также продуктов сгорания в любом поперечном сечении факела. Примем также, что течение происходит в поле постоянного давления. Поэтому плотность газа будем считать величиной, обратно пропорциональной температуре ($\rho T = \text{const}$), не учитывая различия молекулярных весов газов (реагентов и продуктов сгорания). Кроме того, температурную зависимость коэффициентов вязкости, теплопроводности и диффузии примем линейной ($\mu \sim \lambda \sim \rho D \sim T$), а числа Прандтля и Шмидта — постоянными ($Pr = \nu/a = \text{const}, Sc = \nu/D = \text{const}$).

Пренебрежем также изменением молекулярного веса газов и теплоемкости при реакции. Такое допущение приближенно отвечает горению в присутствии достаточно большого количества инертного газа (азот в воздухе и др.). В принятой схеме пространство, занятое факелом, условно разбивается на две зоны, разделенные фронтом пламени — поверхностью слабого разрыва для температуры и концентрации. На этой поверхности производные температуры и концентрации по координатам терпят разрыв, тогда как сами переменные непрерывны.

В одной из зон (*I*), расположенных по обе стороны фронта, находятся газы — топливо и продукты сгорания, во второй (*II*) — окислитель и продукты сгорания. На схеме факела (рис. 1-2) зона *I* расположена выше фронта пламени, а зона *II* — ниже.

Систему уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя сжимаемого газа запишем в следующем виде:

уравнение движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1-1)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (1-2)$$

где u и v — компоненты вектора скорости.

Эти два уравнения являются общими для всей области течения, поскольку на фронте пламени отсутствуют источники или стоки импульса и массы.

Уравнение энергии

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (1-3)$$

где c_p — теплоемкость. В этом уравнении опущены члены, учитывающие лучистый теплообмен, диффузионную теплопроводность и теплоту трения.

Уравнение диффузии для s -го компонента смеси ($s = a, б, в$, причем эти индексы здесь и в дальнейшем относятся соответственно к топливу, окислителю и продуктам сгорания)

$$\rho u \frac{\partial c_s}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_s}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_s \frac{\partial c_s}{\partial y} \right). \quad (1-4)$$

В этом уравнении не учтена термодиффузия.

Уравнение состояния идеального газа (для случая $p = \text{const}$ и $\mu_a \approx \mu_б \approx \mu_в$)

$$\rho T = \text{const}. \quad (1-5)$$

Уравнения, учитывающие зависимость коэффициентов переноса от температуры:

$$\mu = \mu_0 \frac{T}{T_0}, \quad \lambda = \lambda_0 \frac{T}{T_0}, \quad \rho D = \rho_0 D_0 \frac{T}{T_0}. \quad (1-6)$$

Уравнения энергии и диффузии следует интегрировать раздельно для каждой из двух зон I и II, расположенных по разные стороны фронта пламени. В одной из них, как отмечалось, происходит встречная диффузия топлива и продуктов сгорания, во второй — окислителя и продуктов сгорания.

Граничные условия, при которых следует интегрировать систему уравнений (1-1) — (1-6), имеют вид:

для левой полуплоскости ($x \leq 0$)

$$u = u_{+\infty}, \quad T = T_{+\infty}, \quad c_a = c_{a,+\infty} \quad \text{при } y \geq 0,$$

$$u = u_{-\infty}, \quad T = T_{-\infty}, \quad c_6 = c_{6,-\infty} \quad \text{при } y \leq 0;$$

для правой полуплоскости ($x \geq 0$)

$$u = u_{+\infty}, \quad T = T_{+\infty}, \quad c_a = c_{a,+\infty} \quad \text{при } y = +\infty,$$

$$u = u_{-\infty}, \quad T = T_{-\infty}, \quad c_6 = c_{6,-\infty} \quad \text{при } y = -\infty;$$

на фронте пламени

$$T = T_\phi, \quad c_{a,6} = 0 \quad \text{при } y = y_\phi(x).$$

Индекс «ф» указывает, что значение данной величины относится к фронту пламени.

Эта система вместе с граничными условиями может быть проинтегрирована, т. е. может быть найдено распределение профилей скорости, температуры и концентрации во всем поле факела. При этом, однако, в полученные выражения будут входить в качестве неизвестных координаты фронта пламени y_ϕ и x_ϕ , связанные между собой уравнением фронта $y_\phi = y(x_\phi)$.

Для того чтобы довести задачу до конца, т. е. определить местоположение фронта пламени, запишем дополнительное условие, связывающее диффузионные потоки топлива и окислителя на фронте пламени:

$$-\frac{D_6 \left(\frac{\partial c_6}{\partial n} \right)_\phi}{D_a \left(\frac{\partial c_a}{\partial n} \right)_\phi} = \Omega, \quad (1-7)$$

где Ω — стехиометрический коэффициент (отношение масс компонентов при реакции); $\partial/\partial n$ — производные по нормали к поверхности фронта пламени. Прямое решение задачи требует совместного интегрирования всех уравнений. Эффективным приемом решения является переход к переменным, допускающим отделение динамической задачи от тепловой и диффузионной. С этой целью введем преобразование А. А. Дородницына [Л. 38] для случая $p = \text{const}$ в виде

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y p dy.$$

Выпишем формулы замены переменных:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} = \rho \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Для сокращения записи введем безразмерные переменные и параметры:

$$\bar{\xi} = \bar{x}, \quad \bar{\eta} = \int_0^y \bar{\rho} d\bar{y}, \quad \bar{u} = \frac{2u}{u_{+\infty} + u_{-\infty}}, \quad \bar{v} = \frac{2\tilde{v}}{u_{+\infty} + u_{-\infty}},$$

$$\bar{v} = \rho v + u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \Delta \bar{T}_{I, II} = \frac{T - T_{+\infty}}{T_{\Phi} - T_{\pm\infty}}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_{\pm\infty}},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{L} \sqrt{\operatorname{Re} \frac{1+m}{2}}, \quad \operatorname{Re} = \frac{u_{+\infty} L}{\nu_{+\infty}}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad m = \frac{u_{-\infty}}{u_{+\infty}}$$

(L — произвольный масштаб длины). Поскольку в условия задачи величина размерности длины не входит (задача автомодельна), масштаб L в последующем сокращается.

В новых переменных система уравнений (1-1) — (1-4) может быть записана так:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \bar{u} \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{1}{\operatorname{Pr}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{c}_s}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}_s}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{1}{\operatorname{Sc}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}_s}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\eta}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

Эта система по форме совпадает с системой уравнений ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Граничные условия в новых переменных имеют вид:

для левой полуплоскости ($\bar{\xi} \leq 0$)

$$\bar{u} = \frac{2}{1+m}, \quad \bar{v} = 0, \quad \Delta \bar{T}_I = 0, \quad \bar{c}_a = 1 \quad \text{при} \quad \bar{\eta} \geq 0,$$

$$\bar{u} = \frac{2m}{1+m}, \quad \bar{v} = 0, \quad \Delta \bar{T}_{II} = 0, \quad \bar{c}_b = 1 \quad \text{при} \quad \bar{\eta} \leq 0;$$

для правой полуплоскости ($\bar{\xi} > 0$)

$$\bar{u} = \frac{2}{1+m}, \quad \Delta \bar{T}_I = 0, \quad \bar{c}_a = 1 \quad \text{при} \quad \bar{\eta} = +\infty,$$

$$\bar{u} = \frac{2m}{1+m}, \quad \Delta \bar{T}_{II} = 0, \quad \bar{c}_b = 1 \quad \text{при} \quad \bar{\eta} = -\infty;$$

$$\Delta \bar{T}_{1, II} = 1, \quad \bar{c}_{a, b} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_\phi.$$

Поскольку задача в плоскости переменных $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ автомодельна, т. е. допускает переход от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, осуществим так называемое преобразование автомодельности. Для этого введем новые переменные:

$$\bar{u} = F'(\psi), \quad \Delta \bar{T} = \Theta(\psi), \quad \bar{c} = \pi(\psi), \quad \psi = \bar{\eta} \bar{\xi}^\gamma$$

(γ — константа автомодельности, F', Θ, π — универсальные функции координаты ψ). Из формул замены переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} = \gamma \frac{\psi}{\bar{\xi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}, & \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} = \bar{\xi}^\gamma \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\bar{\xi}^\gamma \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \bar{\xi}^\gamma \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\eta}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} = \bar{\xi}^{2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \end{aligned}$$

найдем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} = \gamma \frac{\psi}{\bar{\xi}} F''(\psi), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\xi}^\gamma F''(\psi), \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2} = \bar{\xi}^{2\gamma} F'''(\psi),$$

$$\bar{v} = - \int_0^{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\eta} = \gamma \frac{1}{\bar{\xi}^{\gamma+1}} [F(\psi) - \psi F'(\psi)],$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\xi}} = \gamma \frac{\psi}{\bar{\xi}} \Theta'(\psi), \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{\xi}} = \gamma \frac{\psi}{\bar{\xi}} \pi'(\psi),$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\xi}^\gamma \Theta'(\psi), \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{\eta}} = \bar{\xi}^\gamma \pi'(\psi),$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}^2} = \bar{\xi}^{2\gamma} \Theta''(\psi), \quad \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{\eta}^2} = \bar{\xi}^{2\gamma} \pi''(\psi)$$

(штрих — дифференцирование по ψ).

После подстановки этих выражений в систему уравнений (1-8) приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} F'''(\psi) \bar{\xi}^{2\gamma+1} - \gamma F''(\psi) F(\psi) &= 0, \\ \Theta''(\psi) \bar{\xi}^{2\gamma+1} - \gamma \text{Pr} \Theta'(\psi) F(\psi) &= 0, \\ \pi''(\psi) \bar{\xi}^{2\gamma+1} - \gamma \text{Sc} \pi'(\psi) F(\psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

Для независимости полученных уравнений от переменной $\bar{\xi}$ положим $\gamma = -1/2$. Тогда $\psi = \bar{\eta} / \sqrt{\bar{\xi}}$ и система (1-9) примет вид

$$\left. \begin{aligned} F'''(\psi) + \frac{1}{2} F''(\psi) F(\psi) &= 0, \\ \Theta''(\psi) + \frac{\text{Pr}}{2} \Theta'(\psi) F(\psi) &= 0, \\ \pi''(\psi) + \frac{\text{Sc}}{2} \pi'(\psi) F(\psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

Граничные условия (при $\bar{\xi} > 0$), при которых следует интегрировать эти уравнения, следующие:

$$F'(\psi) = \frac{2}{1+m}, \quad \Theta(\psi)_I = 0, \quad \pi(\psi)_a = 1 \quad \text{при } \psi = +\infty,$$

$$F'(\psi) = \frac{2m}{1+m}, \quad \Theta(\psi)_{II} = 0, \quad \pi(\psi)_b = 1 \quad \text{при } \psi = -\infty,$$

$$\Theta(\psi)_{I, II} = 1, \quad \pi(\psi)_{a, b} = 0 \quad \text{при } \psi = \psi_\phi.$$

Решение первого уравнения системы (1-10) выполним, следуя методу итерации, примененному Гертлером [Л. 110] при решении задачи о смешении плоскопараллельных потоков несжимаемой жидкости. Для этого представим искомую функцию $F(\psi)$ в виде ряда

$$F(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (m-1)^n F_n(\psi) \quad (1-11)$$

и первый член разложения $F_0(\psi)$ примем равным ψ . Используя разложение (1-11), т. е. подставляя в уравнения (1-10) функцию $F(\psi)$ и ее производные и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях разности $m-1$, получаем систему уравнений для определения функций $F_n(\psi)$:

$$\left. \begin{aligned} F_1'''(\psi) + 2\psi F_1''(\psi) &= 0, \\ F_2'''(\psi) + 2\psi F_2''(\psi) &= -2F_1(\psi) F_1''(\psi), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

с граничными условиями

$$F_1'(+\infty) = \frac{2}{1+m}, \quad F_1'(-\infty) = \frac{2}{1+m},$$

$$F_n'(\pm\infty) = 0 \quad (n \geq 2).$$

Ограничимся первым приближением, так как последующие, как известно из решения аналогичных задач, вносят незначительные уточнения. Интегрируя первое уравнение, получаем

$$F(\psi) = C_1 \int_0^\psi \text{erf}(z) dz + C_2 \psi + C_3, \quad (1-13)$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Постоянные интегрирования найдем из граничных условий:

$$C_1 = \frac{1-m}{1+m}, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0.$$

В окончательном виде

$$F'(\psi) = \bar{u} = \frac{1}{1+m} [(1+m) + (1-m) \operatorname{erf}(\psi)]. \quad (1-14)$$

Полученное решение совпадает с выражением для скорости в задаче о смешении потоков газа [Л. 22]:

$$\frac{u}{u_{+\infty}} = \frac{1}{2} [(1+m) + (1-m) \operatorname{erf}(\psi)].$$

Для определения профилей температуры и концентрации проинтегрируем второе и третье уравнения системы (1-10):

$$\Theta(\psi) = C_1' \int_0^\psi [F''(z)]^{\operatorname{Pr}} dz + C_2', \quad (1-15)$$

$$\pi(\psi) = C_1'' \int_0^\psi [F''(z)]^{\operatorname{Sc}} dz + C_2''. \quad (1-16)$$

Значения постоянных интегрирования определяются из граничных условий и соответственно равны:

для зоны I (топливо — продукты сгорания)

$$C_1' = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Pr}}} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad C_2' = \frac{1}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})},$$

$$C_1'' = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sc}}} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Sc}})}, \quad C_2'' = 1;$$

для зоны II (окислитель — продукты сгорания)

$$C_1' = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Pr}}} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad C_2' = \frac{1}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})},$$

$$C_1'' = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sc}}} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Sc}})}, \quad C_2'' = 1.$$

В результате получим следующие выражения для функций $\Theta(\psi)$, $\pi(\psi)$, описывающих распределение температуры и концентрации в факеле:

для зоны I ($\psi_\phi < \psi < +\infty$)

$$\theta_I = \frac{T - T_{+\infty}}{T_\phi - T_{+\infty}} = \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad (1-17)$$

$$\pi_c = \frac{c_a}{c_{a, +\infty}} = 1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Sc}})}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Sc}})}; \quad (1-18)$$

для зоны II ($-\infty < \psi < \psi_\phi$)

$$\theta_{II} = \frac{T - T_{-\infty}}{T_\phi - T_{-\infty}} = \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad (1-19)$$

$$\pi_\phi = \frac{c_\phi}{c_{\phi, -\infty}} = 1 - \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Sc}})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Sc}})}. \quad (1-20)$$

Используя выражения (1-18) и (1-20) и соотношение (1-7),¹ получаем выражение, определяющее координату фронта пламени ψ_ϕ ,

$$\operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Sc}}) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad (1-21)$$

где

$$\beta = \Omega \frac{c_{a, +\infty}}{c_{\phi, -\infty}} \cdot \frac{D_a}{D_\phi}.$$

Для проведения численных расчетов и анализа влияния отдельных параметров процесса на профили скорости, температуры и концентрации необходимо преобразовать полученное решение в плоскость физических переменных x, y . Связь между безразмерными переменными $\psi = \bar{\eta}/\sqrt{\bar{\xi}}$ и $\varphi = \bar{y}/\sqrt{\bar{x}}$ определяется из соотношения

$$\varphi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho(\psi)}.$$

¹ Для фронта пламени примем $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) \approx \frac{d}{dy}$, поскольку $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ (как всегда, в уравнениях пограничного слоя) и, кроме того, $\cos(n, y) \approx 1$, а $\cos(n, x) \approx 0$ (фронт расположен под малым углом наклона к оси x). Например, для $\Omega = 15$, $\operatorname{Pr} = 1$ и $\operatorname{Re}_x = 100 \div 1000$ будет $\cos(n_\phi, y) \approx 0,99 \div 0,998$.

Так как профили плотности по обе стороны фронта пламени описываются различными выражениями, то в зависимости от значения ψ_ϕ (т. е. от того, будет ли $\psi_\phi > 0$ или $\psi_\phi < 0$) выражения, связывающие координаты ψ и ϕ , будут различными. Запишем их отдельно для двух случаев местоположения фронта пламени относительно линии $\psi = 0$.

В том случае, когда фронт пламени находится в области отрицательных значений обобщенной координаты ψ , формулы перехода имеют вид:

для зоны I

$$\varphi_I = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho_I(\psi)} \quad \text{при } \psi_\phi \leq (\psi) < +\infty; \quad (1-22)$$

для зоны II

$$\varphi_{II} = \varphi_\phi + \int_{\psi_\phi}^\psi \frac{d\psi}{\rho_I(\psi)} \quad \text{при } -\infty < \psi \leq \psi_\phi, \quad (1-23)$$

где

$$\varphi_\phi = \int_0^{\psi_\phi} \frac{d\psi}{\rho_I(\psi)}.$$

В случае, когда фронт располагается в области положительных значений координаты ψ , эти формулы принимают вид:

для зоны I

$$\varphi_I = \varphi_\phi + \int_{\psi_\phi}^\psi \frac{d\psi}{\rho_I(\psi)} \quad \text{при } \psi_\phi \leq \psi < +\infty, \quad (1-24)$$

где

$$\varphi_\phi = \int_0^{\psi_\phi} \frac{d\psi}{\rho_{II}(\psi)};$$

для зоны II

$$\varphi_{II} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho_{II}(\psi)} \quad \text{при } -\infty < \psi \leq \psi_\phi. \quad (1-25)$$

В этих выражениях $\overline{\rho_I(\psi)}$, $\overline{\rho_{II}(\psi)}$ — профили плотности, которые определяются соотношениями (1-17) и (1-19) и уравнением состояния. Используя выражения для $\overline{\rho_I(\psi)}$ и $\overline{\rho_{II}(\psi)}$, приводим соотношения (1-22) -- (1-25) к виду, удобному для расчета:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \psi + \frac{\omega_I - 1}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})} \left\{ \left\{ \psi - \left[\psi \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{Pr}}} \{\exp(-\psi^2 \operatorname{Pr}) - 1\} \right] \right\} \right\} \\ &\quad \text{при } \psi_\phi < \psi < +\infty; \\ \varphi_{II} &= \varphi_\phi + (\psi - \psi_\phi) - \frac{\omega_{II} - 1}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})} \left\{ \left\{ (\psi - \psi_\phi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\psi \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}}) - \psi_\phi \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{Pr}}} \{\exp(-\psi^2 \operatorname{Pr}) - \exp(-\psi_\phi^2 \operatorname{Pr})\} \right] \right\} \right\} \\ &\quad \text{при } -\infty < \psi < \psi_\phi, \end{aligned} \right\} \psi_\phi < 0$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_\phi &= \psi_\phi + \frac{\omega_I - 1}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})} \left\{ \left\{ \psi_\phi + \left[\psi_\phi \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{Pr}}} \{\exp(-\psi_\phi^2 \operatorname{Pr}) - 1\} \right] \right\} \right\}, \\ \omega_I &= \frac{T_\phi}{T_{+\infty}}, \quad \omega_{II} = \frac{T_\phi}{T_{+\infty}}; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_\phi + (\psi - \psi_\phi) + \frac{\omega_I - 1}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})} \left\{ \left\{ (\psi - \psi_\phi) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\psi \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}}) - \psi_\phi \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{Pr}}} \{\exp(-\psi^2 \operatorname{Pr}) - \exp(-\psi_\phi^2 \operatorname{Pr})\} \right] \right\} \right\} \\ &\quad \text{при } \psi_\phi < \psi < +\infty; \\ \varphi_{II} &= \psi + \frac{\omega_{II} - 1}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\operatorname{Pr}})} \left\{ \left\{ \psi + \left[\psi \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}}) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{Pr}}} \{\exp(-\psi^2 \operatorname{Pr}) - 1\} \right] \right\} \right\} \\ &\quad \text{при } -\infty < \psi < \psi_\phi, \end{aligned} \right\} \psi_\phi > 0$$

где

$$\Phi_{\phi} = \psi_{\phi} + \frac{\omega_l - 1}{1 + \operatorname{erf}(\psi_{\phi} \sqrt{\operatorname{Pr}})} \left\{ \left\{ \psi_{\phi} + \left[\psi_{\phi} \operatorname{erf}(\psi_{\phi} \sqrt{\operatorname{Pr}}) + \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{Pr}}} \{ \exp(-\psi_{\phi}^2 \operatorname{Pr}) - 1 \} \right] \right\} \right\}.$$

Проиллюстрируем полученные решения. Распределение безразмерной скорости и температуры в затопленном ламинарном факеле (случай $m = 0$, т. е. $u_{-\infty} = 0$) показано на рис. 1-3. Из графика

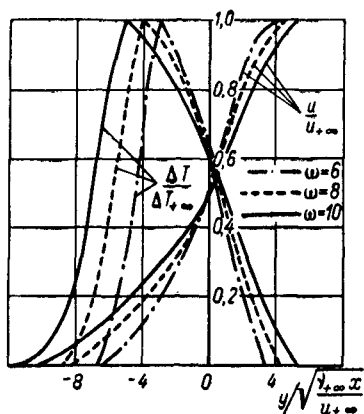


Рис. 1-3. Распределение скорости и избыточной температуры в ламинарном пограничном слое при диффузионном горении ($\beta = 4,0$, $m = 0$).

видно, что увеличение температуры горения (т. е. теплотворности газа) приводит к заметной перестройке профилей температуры и скорости. Это связано в первую очередь с изменением местоположения фронта пламени, который с ростом температуры горения смещается к внешней границе пограничного слоя. Последнее, разумеется, вполне естественно, так как при более высоких значениях температуры происходит более интенсивное расширение газов, вызывающее смещение зоны горения во внешнюю область. Аналогичная картина имеет место и при горении турбулентного факела.

На рис. 1-4 приведены результаты расчета распределения безразмерных значений скорости, температуры, плотности потока импульса ρu^2 , величины ρu ($u + u_{+\infty}$) в спутном ламинарном факеле. Из графика видно, что изменение параметра $m = u_{-\infty}/u_{+\infty}$ вызывает заметную деформацию профилей скорости и температуры. Увеличение параметра m приводит к смещению фронта пламени по направлению к потоку, движущемуся с большей скоростью. Заслуживает внимания своеобразный характер изменения динамического давления в поперечном сечении спутного факела.

Как видно из рис. 1-4, наличие источника тепла (фронта пламени) в зоне смешения приводит к образованию провала в профилях ρu^2 . Профиль избыточной величины ρu ($u - u_{-\infty}$) остается при этом монотонным. Профили температуры в соответствии с принятой схемой расчета имеют острый максимум на фронте пламени. Это является результатом предположения о бесконечно большой скорости реакции. Существенно, что численные расчеты профиля, температуры вблизи максимального значения, выполненные с учетом

конечной скорости реакции, приводят из-за резкой температурной зависимости скорости реакции к практически такому же результату. В качестве подтверждения сошлемся на результаты выполненного на ЭВМ расчета горения однородной смеси в пограничном слое [Л. 82].

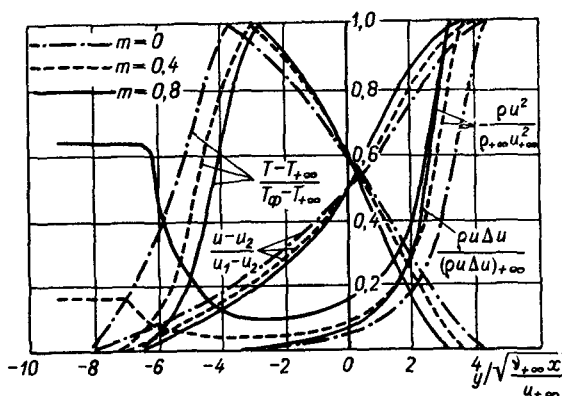


Рис. 1-4. Распределение плотности потока импульса, избыточной температуры и скорости при ламинарном горении неперемешанных газов ($\beta = 4,0$).

1-3. Факел в переходной области течения

К числу основных интегральных характеристик факела относится его длина. Величина ее сравнительно легко может быть определена из опыта, а также из расчета. Ряд работ, посвященных теоретическому и экспериментальному определению длины факела, упоминался ранее. Для диффузионного факела зависимость длины его от основных определяющих факторов может быть получена из соображений размерности. Для ламинарного диффузионного факела, развитие которого определяется только молекулярным смешением (т. е. для малых значений числа Рейнольдса), как и обычно для молекулярной диффузии, можно принять

$$\text{Pe} \frac{d}{l} = \frac{ud^2}{Dl} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{l}{d} = \text{const} \frac{ud}{D},$$

где d — диаметр сопла, Pe — критерий Пекле, l — длина факела. Значение постоянной в этих формулах зависит от стехиометрического коэффициента реакции и от значений чисел Прандтля и Шмидта ($\text{Pr} = \nu/\alpha$, $\text{Sc} = \nu/D$). Таким образом, длина ламинарного факела прямо пропорциональна характерной скорости — скорости истечения газа и квадрату характерного размера — диаметра сопла.

Сохраним ту же форму зависимости длины факела от основных параметров и для турбулентного горения. При этом взамен коэффициента молекулярной диффузии подставим выражение эффективного коэффициента турбулентной диффузии $D_t = k_t u d$, где k_t —

опытный коэффициент. В соответствии с этим для турбулентного диффузионного факела получим $l/d = \text{const}$. В этом случае длина факела не зависит от скорости истечения газа и пропорциональна диаметру сопла. Оба результата — пропорциональность длины ламинарного диффузионного факела скорости истечения и независимость от нее длины турбулентного диффузионного факела — неоднократно подтверждались экспериментально. Результаты опы-

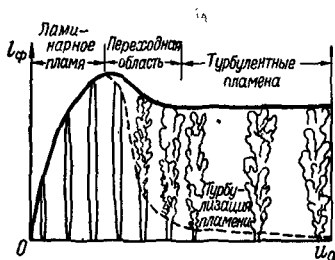


Рис. 1-5. Зависимость длины диффузионного факела от скорости истечения газа [Л. 92].

нелинейным переходом от одной формы к другой. Заметно отличаются факелы и по внешнему виду. Изменения внешнего вида диффузионного факела по мере увеличения скорости истечения сводятся к следующему.

Начиная от некоторого значения скорости, в вершине факела появляются заметные местные пульсации, приводящие к локальному нарушению ламинарного фронта пламени. Затем, по мере дальнейшего возрастания скорости, возмущения распространяются вверх по потоку и охватывают все большую область течения. Длина факела при этом заметно сокращается. Наконец, при достаточно высоких значениях скорости истечения возмущения приближаются к устью сопла, факел становится полностью турбулентным. При дальнейшем увеличении скорости длина факела остается практически постоянной.

тов различных авторов находятся в хорошем согласии с приведенными выражениями (подробные данные по длине турбулентного факела см. в § 2-1). Некоторые результаты эксперимента показаны на рис. 1-5.

Как видно из графиков, в области малых значений числа Re опытные данные удовлетворительно аппроксимируются прямой, проходящей через начало координат, а при достаточно больших числах Re длина факела сохраняется постоянной. Первое отвечает ламинарному режиму течения, второе — турбулентному. В промежуточной области значений числа Рейнольдса наблюдается более сложная зависимость длины факела от скорости истечения с характерным

Для расчета длины факела в переходной области можно воспользоваться интерполяционной формулой, развитой в работе [Л. 32] на основе общих феноменологических представлений о взаимоналожении процессов молекулярного и молярного обмена. Сущность вопроса заключается в следующем.

В переходной области течения выражение эффективного коэффициента суммарной (молекулярной и турбулентной) диффузии запишем по правилу смешения в виде

$$D_{эф} = \varepsilon D_m + (1 - \varepsilon) D_T,$$

где символом ε обозначена доля «неупорядоченности» турбулентного режима. Значение $\varepsilon = 0$ отвечает развитому турбулентному режиму, а $\varepsilon = 1$ — ламинарному. Область $0 < \varepsilon < 1$ соответствует переходной области, в которой молекулярное и молярное перемешивания взаимоналагаются. Во многих случаях $\varepsilon \approx 1 - \gamma$, где γ — так называемый коэффициент перемежаемости [Л. 95], численно равный отношению длительности турбулентного процесса в данной точке к полному времени (см. осциллограммы пульсаций на рис. 1-6).

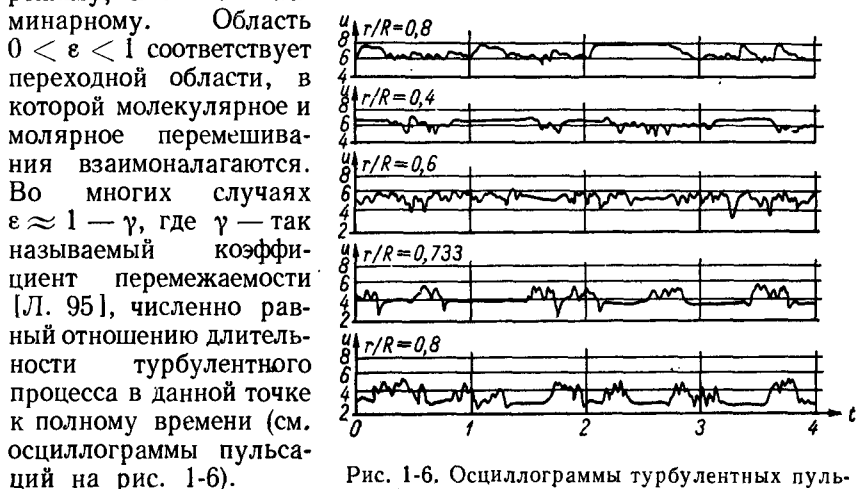


Рис. 1-6. Осциллограммы турбулентных пульсаций за телом — в области перемежаемости [Л. 95].

Примем в соответствии с экспериментом, что ламинарная и турбулентная формы факела устойчивы. Переход от одной из них (ламинарной) к другой (турбулентной), происходящий при увеличении числа Рейнольдса, опишем оправдавшей себя в ряде случаев простейшей нелинейной релаксационной зависимостью [Л. 32]

$$\frac{d\varepsilon}{d\chi} = -\alpha^2 \varepsilon, \quad \varepsilon = e^{-\alpha^2 \chi},$$

где χ — координата состояния; α^2 — эмпирическая постоянная. Для рассматриваемого случая, как и для течения в трубах, естественно положить $\chi = Re - Re_{кр}$, где $Re_{кр}$ — критическое значение числа Рейнольдса [Л. 40]. При $\chi = 0$ имеем ламинарный режим ($\varepsilon = 1$). При $\chi \rightarrow \infty$, очевидно, $\varepsilon \rightarrow 0$, что отвечает развитому турбулентному режиму. Исходя из этого, можно принять для эффективного коэффициента диффузии следующее выражение:

$$D_{эф} = D_T + (D_m - D_T) e^{-\alpha^2 (Re - Re_{кр})}.$$

Подставляя его в формулу для длины факела, получаем для переходной области общее интерполяционное выражение

$$\frac{l_{\Phi}}{d} = \beta \frac{Re}{k_{\tau} Re + \left(\frac{1}{Sc} - k_{\tau} Re \right)^{\alpha^2} (Re - Re_{кр})},$$

переходящее при $Re = Re_{кр}$ и $Re \rightarrow \infty$ соответственно в прежние формулы для длины ламинарного и турбулентного факела.

Для проведения численного расчета следует заимствовать из эксперимента значения эмпирических постоянных α^2 и $Re_{кр}$, а также знать физические свойства газов (число Шмидта) и значение

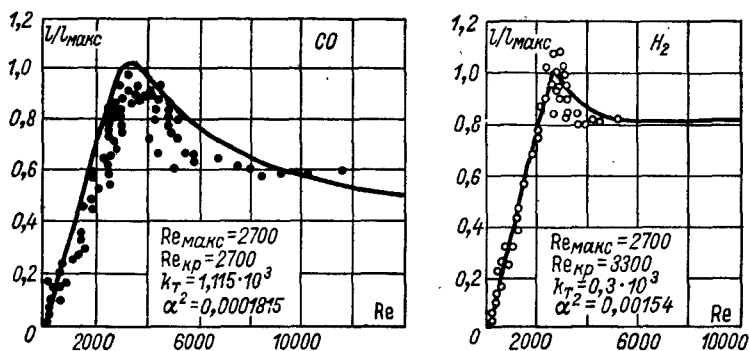


Рис. 1-7. Зависимость длины факела от числа Рейнольдса (сплошная линия — расчет).

коэффициента турбулентной диффузии. Переход от ламинарного факела к турбулентному происходит так, что длина факела в переходной области проходит через экстремум (максимум — см. рис. 1-5) при некотором значении $Re = Re_{\max}$. Величины $Re_{\max}$ и $l_{\max}$ достаточно надежно могут быть определены из эксперимента. Поэтому для определения эмпирических постоянных удобно воспользоваться соотношением $\frac{d}{d Re} \left(\frac{l}{d} \right)_{\max} = 0$. Отсюда нетрудно прийти к выражению, связывающему постоянную α^2 со значением $Re_{\max}$:

$$\alpha^2 = \frac{1}{Re_{\max} [Re_{\max} k_{\tau} Sc - 1]}.$$

Определенные таким образом из конкретного эксперимента величина α^2 и значение $Re_{кр}$ позволяют рассчитать зависимость длины факела от Re во всей области течения. Как видно из рис. 1-7, расчетная кривая удовлетворительно описывает данные эксперимента. Принятые значения $Re_{\max}$ и $Re_{кр}$ указаны на рисунке. Значение коэффициента k_{τ} в формуле $D_{\tau} = k_{\tau} u d$ может быть заимствовано,

например, из работы [Л. 35], согласно которой величина $k_t \approx 10^{-3}$ (точнее $k_t = 0,0009 \div 0,0013$). В расчете учтена также приближенная зависимость значения k_t от отношения плотностей газа в струе и окружающем пространстве в виде

$$k'_t = k_t \left(\frac{\rho_0}{\rho_\Phi} \right)^{0,5},$$

вытекающая из условий постоянства начального импульса [Л. 101].

Конечно, приведенный здесь интерполяционный расчет лишь в первом приближении отражает реальную закономерность изменения длины факела. Существенно, однако, то, что он качественно правильно описывает картину нелинейного критического перехода от ламинарной формы течения к турбулентной. Как и в других случаях такого перехода, типичными для кризиса течения являются своеобразное затягивание ламинарного режима и последующий нелинейный переход к турбулентному режиму. Внешне это проявляется в том, что кривая зависимости длины факела от скорости истечения подходит к постоянному значению для турбулентной области не снизу, а сверху.

1-4. О методе эквивалентной задачи

Для расчета турбулентного диффузионного факела могут в принципе применяться любые расчетные методы, развитые в теории турбулентных струй [Л. 1; 22]. Все они основаны на так называемых полуэмпирических теориях турбулентности [Л. 94 и др.]. Поэтому от аналитически замкнутого расчета ламинарных струй и факела (см. § 1-2) их отличает необходимость введения некоторой эмпирической информации, заимствованной из эксперимента. В простейших случаях автомодельных течений речь идет об одной-двух опытных константах, в сложных случаях объем сведений, необходимых для создания замкнутой системы расчета и возможности сопоставления с опытом, неизбежно возрастает.

Для автомодельных струйных течений несжимаемой жидкости с примерно равным успехом используются расчеты по теории свободного асимптотического пограничного слоя или слоя конечной толщины, а также методы расчета, основанные на интегральных соотношениях. Широко распространен расчет струй и факела, развитый Г. Н. Абрамовичем [Л. 1], на основе априорно принятого профиля скорости и др. Большинство из этих методов расчета неприменимы прямо к неавтомодельным течениям. Достаточной ясности нет также и в вопросе об обобщении известных формул Л. Прандтля для турбулентного трения (теория пути смешения) на движение сжимаемого газа.

Для расчета газового факела большое значение имеет возможность учета непрерывной деформации профилей скорости, температуры и концентрации, а также переменного поля плотности. Этому требованию в известной мере удовлетворяет расчет газовых струй

и факела по методу эквивалентной задачи теории теплопроводности. Поскольку в дальнейшем изложении преимущественно используется этот метод, целесообразно кратко напомнить его особенности. Читатель, знакомый с ним, может пропустить последующее изложение, взяв из данного параграфа только справочные сведения (обозначения, применение таблиц и т. п.).

Метод эквивалентной задачи представляет собой, по-видимому, наиболее четкую и наименее обременительную в отношении физических и математических допущений форму использования для расчетных целей давно обратившей на себя внимание схожести кривых распределения скорости (импульса) в поле течения турбулентных струй и температуры в задачах нестационарной теплопроводности. Сравним, например, распространение круглой струи с охлаждением нагретого относительно остального тела цилиндрического слоя. Пусть в обоих случаях начальное распределение будет однородным и граничные условия будут подобными. По длине струи будет происходить постепенное выравнивание импульса, профиль его, постепенно деформируясь, будет все более размываться, т. е. охватывать все более широкую область при непрерывно падающем уровне на оси. На некотором удалении от устья поперечные распределения будут хорошо аппроксимироваться формулой вида $u \sim \exp(-y^2/a_1x^2)$. Аналогичное будет наблюдаться и при охлаждении цилиндрического слоя, причем роль координаты x перейдет ко времени (поперечные координаты будут качественно тождественны). Через некоторое время, как показывает аналитическое решение, температурные кривые будут подчиняться той же формуле $T \sim \exp(-y^2/a_2t)$, где a_2 , как и ранее a_1 , — постоянная.

Из этой, на первый взгляд, внешней аналогии между процессами рассеяния импульса в турбулентных струях и теплопроводности (или диффузии) следует в принципе возможность, при соответствующих условиях, совмещения относительных кривых распределения, т. е. в конечном счете использования результатов решения одной задачи (теплопроводности) для расчета закономерностей, присущих другой (распространению турбулентных струй). Основным здесь является то, что решение этих разных в сущности физических задач (относящихся, однако, к одному типу процесса — выравниванию начальной неравномерности путем переноса тех или иных субстанций) сопряжено с преодолением качественно различных математических трудностей. В то время как задача о струе относится к числу нелинейных (к тому же выражения для турбулентного трения в уравнениях свободного пограничного слоя в общем случае неизвестны), задача об охлаждении линейна и методы ее решения хорошо разработаны.

Отвлекаясь от различных попыток использования указанного сходства задач и сведения более сложной задачи к более простой, покажем, как реализуется это сходство в методе эквивалентной задачи.

Предположим, что для задач теории турбулентных струй и факела в принципе можно указать такие формулы преобразования независимых переменных, т. е. координат, которые позволили бы описать рассеяние импульса (также избыточной энтальпии и др.) в эффективном пространстве $\xi-\eta$ простейшим уравнением типа теплопроводности и его решениями. Эти преобразования $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ в каждом конкретном случае имеют определенный вид, который должен быть установлен из опыта.

Прежде чем проиллюстрировать эти соображения примером расчета струи (и факела — в § 3-3), введем одно важное ограничение.

Для многих задач — и только к таким будет применяться метод эквивалентной задачи в этой книге, — как показывает опыт, с практической точностью достаточно применения простейшего вида преобразования координат, а именно — замены $\xi = \xi(x)$ и $\eta \approx y$. Иначе говоря, условной деформации («растяжению» и «сжатию») для многих задач следует подвергать только продольную координату, оставляя поперечную инвариантной. В этом случае из опыта берется только уравнение связи $\xi(x)$, зачастую в виде $\xi =$

$= Cx^2$, и оно представляет собой ту эмпирическую информацию, которая упоминалась в начале параграфа.

Таким образом, говоря далее о методе эквивалентной задачи, будем иметь в виду всегда только этот простейший и экспериментально проверенный частный случай ($\eta \approx y$). Конечно, он далеко не универсален и неприменим, в частности, к течениям типа полуограниченных струй или рассмотренным в четвертой главе кольцевым струям и факелу. Следует также заметить, что метод ограничен также в отношении формы начального профиля скорости, температуры и концентрации требованием сравнительной гладкости начального распределения и его однотипности (т. е. возможности отнесения к затопленной струе или к спутным течениям, но не к обоим сразу). Содержание этого замечания станет яснее из последующего изложения (см. главу четвертую).

Допустим, что путем простого, заимствованного из опыта преобразования $\xi = \xi(x)$ и $\eta \approx y$ исходная система уравнений (переноса импульса, тепла и вещества в турбулентном свободном пограничном слое сжимаемого газа) заменяется системой линейных однородных уравнений типа уравнения теплопроводности в его канонической форме.

Эти уравнения вида

$$\frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial F_i}{\partial y} \right), \quad i = u, q, g \quad (1-26)$$

относятся к трем величинам (переносимым субстанциям) — плотности потока избыточного импульса $F_u = \rho u (u - u_\infty)$, избыточной энтальпии $F_q = \rho u c_p (T - T_\infty)$ и вещества $F_g = \rho u (c - c_\infty)$, входящим в условия сохранения. В соответствии с этим эффективные координаты $\xi_i(x)$ имеют в общем случае разные значения: ξ_u , ξ_q и ξ_g — для переноса импульса, тепла и вещества. Практически из опыта по изменению $\rho u \Delta u$ по оси струи заимствуется только зависимость $\xi_u = \xi_u(x)$. Две другие приведенные координаты ξ_q и ξ_g , как показывает опыт, в подавляющем большинстве случаев струйных течений можно принять равными $\xi_u = \text{const}$ ξ_q и $\xi_q = \xi_g$. Значение постоянной σ , равной отношению $\sigma = \xi_u/\xi_q$, сравнительно мало меняется ($\sigma \approx 0,7 \div 0,85$). Ориентировочно для струй можно принять $\sigma \approx 0,75$.

Для упрощения обозначений в дальнейшем везде индекс u отброшен, т. е. обозначено $F \equiv F_u$, $\xi \equiv \xi_u$, а также $\xi = \sigma \xi_q = \sigma \xi_g$.

Уравнения (1-26) подлежат интегрированию взаимной системы уравнений свободного турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа, которые могут быть сведены к виду (1-26) при соответствующем выборе выражений для турбулентных напряжений трения и потоков тепла и вещества [Л. 22].

Заметим, что уравнения (1-26), в частности первое из них — динамическое, не содержат поперечного компонента скорости v . Для его приближенного определения следует использовать, как и обычно, уравнение неразрывности

$$\rho v = -\frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial y^k \rho u}{\partial x} dy.$$

Преимущество метода эквивалентной задачи состоит, во-первых, в применимости его не только к автомоделным (при одной эмпирической константе C в формуле $\sqrt{\xi} = Cx$), но и к неавтомоделным струйным течениям и, во-вторых, в применимости его к течениям сжимаемого газа, т. е. к тем практически важным случаям, когда выражения для τ_t , q_t , g_t неизвестны. Эти обстоятельства делают метод удобным для приближенного расчета факела. Вместе с тем использование его для расчета факела имеет свою специфику.

Как указывалось, зависимости $\xi_i(x)$ при расчете газовых струй заимствуются отдельно из опыта путем сравнения теоретических и эксперимен-

тальных кривых изменения ρu ($u - u_\infty$) и $\rho u (T - T_\infty)$ по оси струи.¹ Такое сравнение дает две формулы связи приведенных координат с реальными:

$$\xi = \xi(x) \text{ и } \xi_q = \xi_q(x).$$

В факеле измеряются величины ρu^2 и температура. По ним рассчитывается и сопоставляется с решением одна только зависимость — изменение ρu ($u - u_\infty$) по оси. Это дает одну координату $\xi = \xi_u(x)$. Вторую координату ($\xi_q = \xi_g$ или константу σ в выражении $\xi \approx \sigma \xi_q$) следовало бы определить из сопоставления эксперимента (температурное поле факела) с расчетом для разных значений σ . Однако такой путь сравнительно несложен только для автомодельных решений. Расчет неавтомодельных течений в полном объеме (при $\sigma \neq 1$) весьма сложен. Поэтому в качестве известного приближения может служить расчет, выполненный для случая $\sigma = 1$.

По-видимому, метод может успешно применяться и к трехмерным течениям (струя и факел, истекающие из прямоугольного насадка) и для ориентировочного расчета течений при наличии градиента давления — закрытых факелов и слабозакрученных струй (при этом $F_u = \rho u^2 + p$). Последнее требует, однако, специального исследования.

Для струйных течений эффективность сведения уравнений свободного турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа к уравнениям типа теплопроводности подтверждена сравнительно обширным экспериментальным материалом [Л. 7; 8; 22; 23; 63].

С математической стороны линеаризация уравнений существенно упрощает решение задачи и позволяет во многих случаях довести расчет до конечного вида. Действительно, методы интегрирования однородного уравнения теплопроводности подробно разработаны в математической физике [Л. 85]. При этом решение осесимметричных задач теории теплопроводности для безграничных областей выражается обычно в виде так называемых P -функций:

$$P(\xi, y) = \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{y^2}{4\xi}\right) \int_0^{y_0} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\xi}\right) J_0\left(\frac{\rho y}{2\xi}\right) \rho d\rho, \quad (1-27a)$$

где ρ — переменный радиус в плоскости $\xi = 0$ и J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

В предельных случаях P -функция сводится к виду

$$P(\xi, y) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{\xi}}\right) \right] \text{ при } \xi \ll 1$$

и

$$P(\xi, y) = \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{y^2}{4\xi}\right) \text{ при } \xi > 1.$$

Аналогично этому решение плоских задач для безграничной области выражается через интегралы Гаусса:

$$\Phi(\xi, y) = \operatorname{erf} \frac{y + y_0}{2\sqrt{\xi}} - \operatorname{erf} \frac{y - y_0}{2\sqrt{\xi}}, \quad (1-27б)$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$ — интеграл Гаусса.

¹ Практически измеряются динамическое давление ρu^2 и температура на оси струи и в спутном факеле. По измеренным их значениям рассчитываются скорость и плотность газа, а также величины $\rho u \Delta u$ и $\rho u \Delta T$.

Функции $P(\xi, y)$ и $\text{erf}(z)$, так же как и бесселевы функции, затабулированы [Л. 102; 11], что существенно упрощает решение. Для удобства расчета таблицы этих функций в необходимом интервале значений аргументов приведены в приложении.¹

При подобных граничных условиях решения осесимметричной и плоской задач теории теплопроводности [уравнения (1-26) для безграничных областей] могут быть представлены единообразно в виде частных интегралов — функций $P(\xi, y)$ или $\Phi(\xi, y)$ соответственно. Удобно поэтому ввести единое для них обозначение — функцию $L(\xi, y)$, сократив тем самым изложение общей для обеих задач части решения.

Покажем это на примере решения задачи о распространении турбулентной неизоэнтальной газовой струи в спутном однородном потоке. Как будет видно из дальнейшего, решение аналогичных задач теории факела во многом схожи с приводимым примером, который может поэтому служить своего рода кратким введением к более сложным задачам.

Схема течения и основные обозначения указаны на рис. 1-8. Предполагается, что струя газа (со скоростью u_0 , температурой T_0 и плотностью ρ_0) истекает из круглого или плоского сопла размером y_0 (y_0 — радиус или полуширина выходного сечения сопла) в неограниченный однородный спутный поток, движущийся параллельно струе (со скоростью u_∞ , температурой T_∞ и плотностью газа ρ_∞).

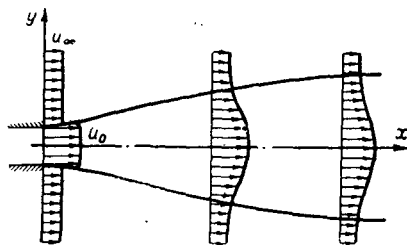


Рис. 1-8. Схема распространения газовой струи в спутном потоке.

Решение методом эквивалентной задачи теории теплопроводности сводится к интегрированию уравнений (1-26) для переноса импульса и тепла, т. е. для функций

$$F_u = \frac{\rho u (u - u_\infty)}{\rho_0 u_0 (u_0 - u_\infty)} \quad \text{и} \quad F_q = \frac{\rho u c_p (T - T_\infty)}{\rho_0 u_0 c_{p0} (T_0 - T_\infty)},$$

при следующих граничных условиях (в координатах $\bar{\xi} = \xi/y_0^2$, $\bar{y} = y/y_0$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \bar{\xi}_i > 0 \left\{ \begin{array}{ll} F_u = 1, & F_q = 1 \quad \text{при } 0 \leq \bar{y} < 1, \\ F_u = 0, & F_q = 0 \quad \text{при } 1 \leq \bar{y} < \infty; \end{array} \right. \\ \text{при } \bar{\xi} > 0 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial F_u}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial F_q}{\partial \bar{\xi}} = 0 & \text{при } \bar{y} = 0, \\ F_u = F_q = 0 & \text{при } \bar{y} = \infty. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (1-28)$$

¹ Приведены две таблицы функций. В табл. 1 указаны значения функции $P(\xi, y)$ для $0 \leq \sqrt{\xi} \leq 1,18$ и $0 \leq \bar{y} \leq 4$ (черта отброшена). Данные этой таблицы заимствованы из статьи Мастерса [Л. 111], в которой они приведены с интервалом по аргументу $\sqrt{\xi}$, равным 0,05. В табл. 1 принят интервал $\Delta \sqrt{\xi} = 0,01$, причем промежуточные сравнительно с [Л. 111] значения получены линейной интерполяцией. Интервал Δy сохранен тем же, что и в [Л. 111].

В табл. 2 даны функции $\text{erf}(z)$ для $0 \leq z \leq 3$, заимствованные из книги Ямке и Эмде [Л. 102].

Решение уравнений (1-26) можно представить в виде

$$F_u = A_u + B_u L(\xi_u, y), \quad F_q = A_q + B_q L(\xi_q, y),$$

где $L(\xi, y) \equiv P(\xi, y)$ — для осесимметричной ($k = 1$) и $L(\xi, y) \equiv \Phi(\xi, y)$ — для плоской ($k = 0$) задачи.

Из граничных условий (1-28) следует $A_i = 0$, $B_i = 1$, так что решение для обеих задач записывается так:

$$F_i = L(\xi_i, y) \quad (1-29)$$

или в расшифрованном виде

$$\frac{\rho u (u - u_\infty)}{\rho_0 u_0 (u_0 - u_\infty)} = L(\xi, y), \quad \frac{\rho u c_p (T - T_\infty)}{\rho_0 u_0 c_{p0} (T_0 - T_\infty)} = L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right), \quad (1-30)$$

где обозначено $\xi \equiv \xi_u = \sigma \xi_q$.

Таким образом, распределение величин $\rho u \Delta u$ и $\rho u c_p \Delta T$ в пространстве ξ, y найдено. Для расчета первичных характеристик течения — скорости, температуры и плотности — приходится пренебречь различием между осредненным в смысле Рейнольдса значением произведения двух (или более) величин и произведением их средних (в том же смысле) значений. Иначе говоря, следует положить, например, $\overline{\rho u} = \bar{\rho} \cdot \bar{u}$; $\overline{\rho u^2} = \bar{\rho} \cdot \bar{u}^2$ и т. д.

В этом предположении¹ уравнения (1-30) позволяют выполнить несложный алгебраический пересчет и найти в конечном итоге распределение всех переменных в пространстве, занятом струей. Не приводя деталей, укажем на ход расчета, а затем приведем конечные выражения.

Введем обозначения $m = u_\infty/u_0$ и $\omega = \rho_\infty/\rho_0 = T_0/T_\infty$. Примем для простоты $c_p \approx \text{const}$. С учетом этого уравнения (1-30) перепишем в виде

$$\frac{\rho u}{(\rho u)_0} \left(\frac{u}{u_0} - m \right) = (1 - m) L(\xi, y),$$

$$\frac{\rho u}{(\rho u)_0} - \omega \frac{u}{u_0} = (1 - \omega) L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right).$$

Эти выражения (с учетом равенства $\rho/\rho_0 = T_0/T$) представляют собой два уравнения с двумя неизвестными u/u_0 и $\rho u/(\rho u)_0$. Решая их совместно, приходим к квадратному уравнению относительно величины u/u_0 :

$$\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 - \left[m + \frac{1 - \omega}{\omega} L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right) \right] \frac{u}{u_0} + \frac{1 - \omega}{\omega} m L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right) -$$

$$- \frac{1 - m}{\omega} L(\xi, y) = 0.$$

Решение этого уравнения дает распределение скорости течения и, следовательно, всех остальных переменных во всем поле струи. Конечные выражения для краткости сведем в таблицы: табл. 1-1 относится к частному случаю затопленной струи ($u_\infty = 0$, $m = 0$); табл. 1-2 — к общему случаю спутной струи.

¹ Заметим, что оно отвечает обычному пересчету измеренных в опыте средних значений в турбулентном потоке $\overline{\rho u^2}$ и $\bar{T}$ к значениям скорости, плотности тока и других величин по формулам $\bar{u} = \sqrt{\overline{\rho u^2}/\bar{\rho}}$, где $\bar{\rho} = \text{const}/\bar{T}$ и т. п.

Функция	Выражение
$\frac{u}{u_0}$	$\frac{1-\omega}{2\omega} L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega}{(1-\omega)^2} \cdot \frac{L(\xi, y)}{L^2(\xi/\sigma)}} \right] = f_1 (1 \pm f_2)$
$\frac{\rho u}{(\rho u)_0}$	$\omega f_1 (-1 \pm f_2)$
$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	$[\omega f_1 (-1 + f_2)]^{-1} L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right)$

Таблица 1-2

Функция	Выражение
$\frac{u}{u_0}$	$\frac{m}{2} + \frac{1-\omega}{2\omega} L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right) \pm \sqrt{\left[\frac{m}{2} - \frac{1-\omega}{2\omega} L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right) \right]^2 + \frac{1-m}{\omega} L(\xi, y)} = f_3 \pm f_4$
$\frac{\rho u}{(\rho u)_0}$	$\omega (f_3 \pm f_4) - f_5, \quad f_5 = (1-\omega) L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right)$
$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	$L\left(\frac{\xi}{\sigma}, y\right) [\omega (f_3 \pm f_4) - f_5]^{-1}$

В формулах табл. 1-1 и 1-2 выражения вспомогательных функций f_1 — f_4 видны из первых формул; знак плюс перед корнем (или функцией f_4) отвечает значению $\omega > 1$ и знак минус — значению $\omega < 1$. Напомним, что для осесимметричной задачи $L(\xi, y) \equiv P(\xi, y)$ и для оси струи (при $y = 0$)

$$P(\xi, 0) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right). \quad (1-31)$$

Аналогично этому для плоской струи

$$L(\xi, 0) \equiv \Phi(\xi, 0) = 2 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\right). \quad (1-32)$$

Выражения, сведенные в табл. 1-1 и 1-2, определяют распределение всех переменных в приведенном пространстве. Установив из опыта связь координат $\xi = \xi(x)$, а также $\sigma = \xi/\xi_0$, нетрудно перейти к распределению переменных в пространстве x, y . Тем самым расчет доводится до конца (подробнее см. [Л. 22]). Полученные формулы будут использованы в примере расчета в § 3-3.

2-1. О расчете диффузионного факела

Принято различать две формы прямоструйного факела — затопленный факел и спутный. В первом случае речь идет об истечении струи топлива в пространство, заполненное неподвижным окислителем (например, воздухом), во втором — об истечении струи топлива в движущийся параллельно спутный поток окислителя. Второй случай, очевидно, является общим и содержит в себе в качестве

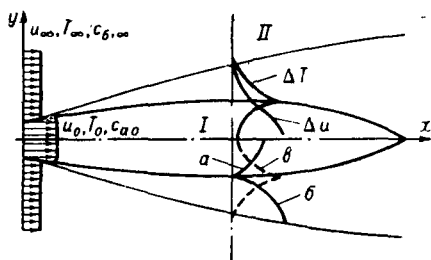


Рис. 2-1. Схема диффузионного факела конечного размера.

частного, при равенстве нулю скорости спутного потока, задачу о затопленном факеле. Поэтому для общности, говоря о диффузионном факеле, будем иметь в виду спутный факел, схематически представляя его следующим образом.

Допустим, что струя горячего газа (топлива) вытекает из круглой или плоской горелки в спутный поток окислителя. Распределения скорости в выходном сечении сопла и спутном потоке, так же как начальное (при $x = 0$) распределение температуры и концентрации топлива и окислителя, будем считать заданными. Для простоты примем их, как показано на рис. 2-1, равномерными.

При истечении газа из профилированного сопла строго по направлению оси x , при параллельности спутного потока и струи давление во всем пространстве, занятом факелом, можно считать постоянным. Если вблизи устья горелки установлено стабилизирующее устройство (например, тонкий кольцевой стабилизатор, размерами которого и влиянием на течение можно пренебречь), то в турбулентном пограничном слое — области смешения, образованной параллельными потоками топлива и окислителя, — установится устойчивый стационарный фронт пламени. Фронт этот начнется вблизи кромок сопла (точнее — у стабилизатора). Вначале он несколько расширится, а затем на сравнительно большом расстоянии (порядка десятков и более калибров) сузится и, наконец, сожмется на оси факела.

В предположении о бесконечно большой скорости химической реакции горения, общем для этой части книги, фронт пламени можно представить в виде поверхности, в основной своей части близкой к цилиндрической, разграничивающей факел на две области. Одна из них — внутренняя зона I (см. рис. 2-1) — заполнена топливом и продуктами сгорания, вторая — внешняя зона II — окислителем и продуктами сгорания. К поверхности фронта изнутри диф-

фундирует топливо, извне — окислитель. От фронта пламени в обе стороны — во внутреннюю и наружную зоны факела — диффундируют продукты сгорания. На самом фронте концентрация каждого из реагентов равна нулю, а концентрация продуктов сгорания максимальна. При этом притекающие к фронту и сгорающие на нем диффузионные потоки реагирующих газов — топлива и окислителя — находятся в стехиометрическом соотношении.

С качественной стороны распределение температуры (максимум на фронте) и концентраций реагентов вблизи фронта пламени, а также распределение скорости в турбулентном факеле аналогичны распределению этих величин при ламинарном диффузионном горении (см. § 1-2). Поэтому рассмотренная картина диффузионного факела относится как к турбулентному, так и к ламинарному факелу конечного размера (спутному в общем случае или затопленному — в частном).

Строгий количественный расчет диффузионного факела конечного размера крайне сложен. Однако именно эта (неавтомодельная) задача представляет наибольший практический интерес; ей же свойственны наибольшие трудности вычислительного характера.

Математическая постановка рассматриваемой задачи в общем случае сводится к следующему. Совместному интегрированию подлежит система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для стационарного осесимметричного ($k = 1$) или плоского ($k = 0$) турбулентного или ламинарного пограничного слоя сжимаемого газа.

Для турбулентного слоя выражения $\tau = \tau_t$, $q = q_t$ и $g = g_t$ (для турбулентных касательного напряжения трения и потоков тепла и вещества), стоящие справа в написанных ниже уравнениях переноса, должны быть раскрыты с помощью одной из полуэмпирических моделей. Как правило, все они включают в себя производные (скорости, температуры и др.) по координате y , так что уравнения будут второго порядка по y и первого — по x . Для ламинарного слоя, когда $\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{q}{\rho c_p} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ и $\frac{g}{\rho} = -D \frac{\partial c}{\partial y}$ — по законам Ньютона, Фурье и Фика, этот порядок дифференциальных уравнений очевиден.

К системе уравнений, о которых идет речь, относятся следующие:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y^k \tau), \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k \rho v)}{\partial y} &= 0, \rho T = \text{const}, \\ \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k q)}{\partial y}, \\ \rho u \frac{\partial c_s}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_s}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k g)}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

Объединяя первое из этих уравнений со вторым (уравнением неразрывности), его часто переписывают в виде

$$\frac{\partial \rho u (u - u_{\infty})}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial y^k \rho v (u - u_{\infty})}{\partial y} = \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k \tau)}{\partial y}$$

для спутного течения (u_{∞} — скорость в невозмущенном спутном потоке) или при $u_{\infty} = 0$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial y^k \rho uv}{\partial y} = \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k \tau)}{\partial y}.$$

Аналогично этому уравнения энергии и диффузии придают вид уравнения сохранения:

$$\frac{\partial (\rho u c_p \Delta T_f)}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k \rho v c_p \Delta T_f)}{\partial y} = \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k q)}{\partial y}$$

и

$$\frac{\partial (\rho u \Delta c_s)}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k \rho v \Delta c_s)}{\partial y} = \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial (y^k g)}{\partial y},$$

отсчитывая температуру и концентрацию от некоторого постоянного значения (например, на фронте пламени или в невозмущенном спутном потоке).

Возвращаясь к системе уравнений (2-1), замечаем, что третье уравнение в ней (уравнение состояния идеального газа) написано в простейшем для расчета предположении, что молекулярные веса газов (топлива, окислителя и продуктов сгорания) близки между собой, так что влияние их на плотность смеси газов не учитывается.

Индекс j в уравнении энергии может иметь два значения: I и II — соответственно двум зонам факела — внутренней и внешней. Наконец, индекс s в уравнении диффузии, как и ранее, может иметь три значения: $s = a, b, v$ — соответственно топливу, окислителю и продуктам сгорания (принципиально в каждой из зон I и II ; в действительности в зоне I будет $s = a, v$, а в зоне II , в свою очередь, $s = b, v$).

Выпишем теперь граничные условия для системы уравнений (2-1):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq y_0, u = u_0, T = T_0, c_a = c_{a0}, c_s = 0, \\ y_0 \leq y \leq +\infty, u = u_{\infty}, T = T_{\infty}, \\ c_b = c_{b,+\infty}, c_s = 0; \end{array} \right. \\ \text{при } x > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{а) } 0 \leq y \leq y_{\phi} \text{ — в зоне } I \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial c_a}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \\ T = T_{\phi}, c_a = 0, c_s = c_{s\phi} \text{ при } y = y_{\phi}; \\ \text{б) } y_{\phi} \leq y \leq \infty \text{ — в зоне } II \\ T = T_{\phi}, c_b = 0, c_s = c_{s\phi} \text{ при } y = y_{\phi}, \\ u = u_{\infty}, T = T_{\infty}, c_b = c_{b,\infty}; \\ \text{в) } c_s = 0 \text{ при } y = \infty. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (2-2)$$

Кроме того, на поверхности фронта пламени, т. е. при $y_\phi = y(x_\phi)$, соблюдается сформулированное ранее стехиометрическое условие для притекающих к фронту потоков реагентов:

$$-\left(D_\phi \frac{\partial c_\phi}{\partial n}\right)_\phi = \Omega \left(D_a \frac{\partial c_a}{\partial n}\right)_\phi.$$

Поскольку уравнения пограничного слоя относятся к параболическим дифференциальным уравнениям (в которых пространственная координата x играет роль как бы «времени» в уравнении типа теплопроводности), задача в целом в связи с условием на фронте относится к классу краевых задач с «движущейся границей» $y_\phi = y(x_\phi)$. Классический пример задач такого рода — известная задача Стефана о движении фронта плавления и т. п. [Л. 85].

В расчете диффузионного факела уравнение границы $y_\phi(x_\phi)$, как правило, заранее неизвестно и должно быть найдено в ходе решения с помощью соотношения (1-7) или из другого дополнительного условия. Это обстоятельство порождает дополнительную нелинейность задачи, связанную с наличием «движущейся границы». В таком виде решение может быть в принципе получено численно на ЭВМ для конкретных значений параметров. Для турбулентного факела (как и при расчете турбулентных газовых струй) задача усложняется необходимостью задания неизвестных в общем виде выражений для величин τ_t , q_t и g_t . В этом случае целесообразно выполнить расчет по методу эквивалентной задачи теории теплопроводности (см. § 1-4), при котором уравнения (2-1) заменяются линейными:

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\bar{y}^k} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{y}^k \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{y}} \right). \quad (2-3)$$

В уравнениях (2-3) черта сверху означает переход к безразмерным (относительным) величинам. Индекс i при координате ξ_i и функции F_i соответствует u , q и g , причем, как отмечалось в § 1-4, у ξ_u и F_u индекс u в дальнейшем будет отброшен ($\xi \equiv \xi_u$, $F \equiv F_u$). Безразмерные величины $\bar{F}_i$ примем в виде:

для всей области течения

$$\bar{F} = \frac{\rho u (u - u_\infty)}{\rho_0 u_0 (u_0 - u_\infty)};$$

для внутренней I (для топлива) и внешней II (для продуктов сгорания) зон факела

$$\bar{F}_{qI} = \frac{\rho u c_p (T - T_\phi)}{\rho_0 u c_{p0} (T_0 - T_\phi)} \quad \text{и} \quad \bar{F}_{qII} = \frac{\rho u c_p (T - T_\infty)}{\rho_0 u_p c_{p\phi} (T_\phi - T_\infty)};$$

$$\bar{F}_{ga} = \frac{\rho u c_a}{\rho_0 u_0 c_{a0}}, \quad \bar{F}_{gs} = \frac{\rho u c_s}{\rho_\phi u_\phi c_{s\phi}}.$$

Кроме того, обозначим: $\bar{\xi}_i = \xi_i / y_0^2$ и $\bar{y} = y / y_0$ — безразмерные координаты, если y_0 — характерный размер (радиус или полуширина) выходного сечения сопла горелки. Разумеется, что выбор масштабов для безразмерных функций $\bar{F}_i$ и начала отсчета для них произволен; принятый выше удобен тем, что сокращает преобразования в ходе решения. Для упрощения записи в дальнейшем черта над безразмерными величинами, а также индексы q и g у F_{q1} , F_{ga} и т. д. будут отброшены. Это не может привести к недоразумениям, поскольку эти величины относятся в расчете к разным зонам факела. Последнее видно из граничных условий к системе (2-3), записанных в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \xi = 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq y_0, F = 1, F_I = 1, F_a = 1, \\ y_0 \leq y \leq +\infty, F = 0, F_{II} = 0, F_g = 0, \end{array} \right. \\ \\ \text{при } \xi > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{а) } 0 \leq y \leq y_\phi \text{ — в зоне I} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F_I}{\partial y} = \frac{\partial F_a}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \\ F_I = 1, F_a = 0 \text{ при } y = y_\phi; \\ \text{б) } y_\phi \leq y \leq \infty \text{ — в зоне II} \\ F_{II} = 1, F_g = 1 \text{ при } y = y_\phi, \\ F = 0, F_{II} = 0, F_g = 0 \text{ при } y = \infty. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (2-4)$$

Кроме того, для границы, которая разделяет зоны и на которой $y_\phi = y_\phi(x_\phi)$, сохраняется условие (1-7), необходимое для отыскания уравнения фронта пламени.

В таком виде краевая задача распадается на две. Независимо от других уравнений интегрируется уравнение для функции F , определяющее непрерывное во всей области течения (для самой функции и ее производных по координатам) распределение избыточной плотности потока импульса $ri\Delta u$. Это отделение динамической задачи весьма важно, так как делает возможным самостоятельное сопоставление решения с экспериментальным полем ri^2 и определение (по падению ri^2 на оси факела) связи приведенной координаты $\xi = \xi(x)$ с реальной координатой x .

В отличие от этого, уравнения переноса энергии и вещества должны интегрироваться для определения функций F_q и F_g раздельно по зонам факела. Хотя сами функции (или, более точно, отвечающие им физические переменные: температура и др.) непрерывны, производные их терпят разрыв на фронте. В зоне I при выбранной схеме решения должны интегрироваться уравнения для функций F_I и F_a , в зоне II — для F_{II} и F_g . Этого достаточно для определения концентраций всех газов (a , b и g) во всем поле, поскольку в зоне I, очевидно, $c_g = 0$, а в зоне II, соответственно, $c_a = 0$.

Несмотря на линеаризацию уравнений при переходе от системы (2-1) к системе (2-3), задача остается все же нелинейной из-за наличия в ней «движущейся границы» — поверхности фронта пламени. Дополнительная трудность связана еще и с тем, что условие (1-7) формулируется не относительно одной из функций F_q или F_g , а относительно концентрации c_s . Это приводит к взаимосвязи всех трех уравнений для функций F_i . Результаты совместного решения их следует использовать для перехода от распределения сложных величин ρu ($u = u_\infty$), $\rho u (T - T_\infty)$ и т. д. к распределению первичных — температуры, скорости и концентрации. И лишь после этого можно удовлетворить условию (1-7) и тем самым отыскать местоположение фронта пламени и замкнуть задачу в целом.

Аналитическое решение такой задачи не содержит принципиальных трудностей в том случае, когда приведенные координаты ξ_i совпадают, значение $\sigma \approx 1$ и переход к физической плоскости течения для всех функций F_i одинаков. При этом фронт пламени, на котором $T = T_\phi = \text{const}$ и $c_{a\phi} = c_{o\phi} = 0$, будет не только изотермической поверхностью, но и, с учетом равенства $\rho T = \text{const}$, поверхностью постоянного значения скорости, плотности тока, динамического давления и вообще любой функции F_i . То же самое относится к каждой «изоповерхности» в эффективном (ξ, y) или реальном (x, y) пространстве. В физическом плане это сводит задачу к идеализированной, отвечающей расчету при равенстве единице своего рода турбулентного числа Прандтля. Как будет показано ниже, решение такой задачи отражает все важнейшие свойства реального факела. Это обстоятельство определяет целесообразность использования такого приближенного (в физическом отношении) решения задачи о факеле конечного размера. При этом, естественно, игнорируется хорошо известное из экспериментальных данных по турбулентным газовым струям [Л. 22] и несомненно присущее факелу различие в интенсивности переноса импульса и тепла (неравенство $\sigma < 1$, если $\xi = \sigma \xi_q$).

Как будет показано в следующей главе при сопоставлении результатов расчета с экспериментом, решение в предположении $\sigma \approx 1$ правильно отражает главные закономерности диффузионного факела и может служить основой для приближенного количественного расчета. Правда, во всех обработанных опытах (см. § 3-1) заметно систематическое отклонение опытных данных от расчетных (для случая $\sigma = 1$), которое является следствием того, что и в факеле при $\sigma < 1$ перенос тепла происходит несколько быстрее переноса количества движения, профили температуры в поперечных сечениях факела, как и струй, несколько шире профилей скорости, расчетная длина факела (при $\sigma = 1$) меньше экспериментальной. Остается открытой поэтому возможность в последующем численного решения краевой задачи во всей ее сложности, т. е. с учетом различия приведенных координат ξ_i .

Общий метод решения таких задач теории теплопроводности изложен в руководствах по математической физике [Л. 85].

Получение его связано с большим объемом вычислений с помощью ЭВМ, в частности, из-за неизбежности применения в ходе решения последовательных приближений при отыскании координат фронта. Такой расчет, проведенный для конкретных значений параметров, хотя и потребовал бы для обобщения и сопоставления с опытом значительной вариации расчетных условий, позволил бы в принципе выявить из эксперимента¹ наиболее отвечающее ему значение σ . Выполнение такого рода численных расчетов, вероятно, окажется целесообразным при дальнейшем накоплении и уточнении экспериментальных данных.

В последующем ограничимся изложением приближенного решения задачи для случая $\xi = \xi_q = \xi_g$, т. е. $\sigma = 1$. Результаты этого решения (см. § 2-3) будут позднее (в § 3-1 и 3-2) сопоставлены с экспериментом.

Целесообразно, однако, предварительно привести решение более простой (автомодельной) задачи о плоском турбулентном фронте пламени, расположенном в зоне смешения двух плоскопараллельных спутных потоков. Для этой задачи, аналогичной рассмотренной в § 1-2 для ламинарного диффузионного факела, закон «движущейся границы» определяется сразу из соображений размерности: $y_f \sim \sqrt{\xi_f}$ (при $\sqrt{\xi} = Cx$, очевидно, $y_f \sim x_f$, поверхность фронта дает в пересечении с плоскостью $x - y$ прямую $y/x_f = \text{const}$). В этом случае линии постоянных значений функций F_i , температуры, скорости и концентрации совпадают с приведенными координатами $\psi_i = y / \sqrt{\xi_i} = \text{const}$. Поэтому решение автомодельной задачи (см. § 2-2) доводится до конца при произвольном значении σ . Результаты решения позволяют оценить влияние выбора значения σ на местоположение фронта пламени и структуру факела.

2-2. Плоский фронт пламени

Рассмотрим диффузионное горение в области турбулентного смешения двух спутных плоскопараллельных потоков газа — топлива и окислителя. Схема факела аналогична изображенной на рис. 1-2 для ламинарного горения. Она отличается, однако, от ламинарной прямолинейностью фронта пламени. Это следует из приведенного ниже решения, но может быть, как об этом говорилось в предыдущем параграфе, обосновано простейшими соображениями размерности.

¹ Приведенная ранее в работах [Л. 41; 42; 44] и включенная в [Л. 22] попытка приближенного аналитического решения задачи о турбулентном диффузионном факеле конечного размера (затопленном и спутном) при $\sigma \neq 1$ не является вполне корректной. Вместе с тем она приводит к хорошему согласию с опытом, что подтверждено в экспериментах различных авторов. Это объясняется тем, что при $\sigma \neq 1$ решение [Л. 41 и др.] учитывает основное влияние этого параметра. Математическая нестрогость — допущение о постоянстве скорости на всем фронте пламени — при больших значениях стехиометрического соотношения вносит сравнительно малые погрешности в результаты расчета.

Действительно, для рассматриваемой (автомодельной) задачи о турбулентном фронте пламени в исходных уравнениях и граничных условиях отсутствует величина размерности длины (размер сопла или отношение v/u_0 — в ламинарном факеле). Поэтому любая безразмерная функция, например $F = \frac{\rho u (u - u_{-\infty})}{\rho_0 u_0 (u_0 - u_{-\infty})}$, не может зависеть от координат x и y (или ξ и y) в отдельности, а будет определяться безразмерным аргументом вида y/x в физической или $y/\sqrt{\xi}$ в приведенной плоскости. В частности, на фронте пламени — поверхности постоянных значений температуры, скорости, функций F_i и т. п. — должно быть $y_\phi = \text{const} \sqrt{\xi_\phi}$ или $y_\phi = \text{const} x_\phi$.

Аналогично этому в задаче Стефана [Л. 85] координата фронта плавления пропорциональна корню из времени ($x \sim \sqrt{t}$; в методе эквивалентной задачи роль «времени» играет координата ξ). Это сопоставление поясняет аналогию между задачами теории факела и теплопроводности с «движущейся границей».

Заметим также, что рассматриваемая задача о плоском фронте пламени в техническом плане представляет собой схематизацию течения и горения в начальном участке осесимметричного или плоского факела конечного размера (в общем случае — спутного). Для обоих течений ($k = 1$ и $k = 0$) при относительно малой толщине области смещения задачу можно считать плоской. Решим ее методом эквивалентной задачи теории теплопроводности (см. § 1-4).

Выберем функции F_i в следующем виде, удобном для расчета: для всей области течения

$$F = \frac{\rho u (u - u_{-\infty})}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} (u_{+\infty} - u_{-\infty})};$$

для зоны I (формулы слева) и зоны II (справа)

$$F_I = \frac{\rho u c_p (T - T_\phi)}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} c_{p,+\infty} (T_{+\infty} - T_\phi)} \quad \text{и} \quad F_{II} = \frac{\rho u c_p (T - T_{-\infty})}{\rho_\phi u_\phi c_{p\phi} (T_\phi - T_{-\infty})},$$

а также

$$F_a = \frac{\rho u c_a}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} c_{a,+\infty}} \quad \text{и} \quad F_\phi = \frac{\rho u c_\phi}{\rho_\phi u_\phi c_{\phi\phi}}.$$

Индексы $+\infty$ и $-\infty$ относятся здесь соответственно к невозмущенным потокам топлива и окислителя, индекс «ф», как всегда, — к фронту пламени.

Исходная система уравнений для плоского течения ($k = 0$) имеет вид

$$\frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} \quad (2-5)$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \xi = 0 & \begin{cases} y < 0, F = F_I = F_a = 1, \\ y \geq 0, F = 0, F_{II} = 1, F_s = 0; \end{cases} \\ \text{при } \xi > 0 & \begin{cases} F = F_I = F_a = 1, \frac{\partial F_I}{\partial y} = 0 \text{ при } y = +\infty, \\ F = 0, F_{II} = F_s = 0, \frac{\partial F_I}{\partial y} = 0 \text{ при } y = -\infty, \\ F_I = F_{II} = F_a = 0, F_s = 1 \text{ при } y = y_\phi. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

К этим условиям следует добавить соотношение на фронте

$$\left(D_{\tau\phi} \frac{\partial c_\phi}{\partial n} \right)_\phi = -\Omega \left(D_{\tau a} \frac{\partial c_a}{\partial n} \right)_\phi.$$

Заменим в равенстве (1-7) производную по нормали к фронту

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(u, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) \approx \frac{\partial}{\partial y}$$

с учетом неравенств $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$ (известное свойство пограничного слоя) и $\cos(u, x) \approx 0$, $\cos(n, y) \approx 1$ производной по координате y . Поэтому взамен (1-7) примем приближенно (при $D_{\tau a} \approx D_{\tau\phi}$ — равенстве коэффициентов турбулентной диффузии компонентов)

$$\left. \frac{\partial c_\phi}{\partial y} \right|_\phi = -\Omega \left. \frac{\partial c_a}{\partial y} \right|_\phi. \quad (2-7)$$

Решение уравнений (2-5) имеет вид

$$F_i = A_i + B_i \operatorname{erf}(\psi_i), \quad (2-8)$$

где A_i и B_i — постоянные интегрирования; $\psi_i = y/\sqrt{\xi_i}$ — приведенная координата, разная для различных уравнений, причем $\xi_u = \xi$ и $\xi_q = \xi_q = \frac{1}{\sigma} \xi$ — эмпирическая постоянная. В соответствии с этим $\psi = y/\sqrt{\xi}$ и $\psi_q = \psi_g = y/\sqrt{\sigma/\xi} = \psi/\sqrt{\sigma}$.

Постоянные интегрирования A_i и B_i легко находятся из граничных условий.

В результате решения соотношения (2-8) могут быть представлены следующими выражениями:

$$F(\psi) = \frac{\rho u (u - u_{-\infty})}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} (u_{+\infty} - u_{-\infty})} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \psi), \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} F_1(\psi) &= \frac{\rho u c_p (T - T_\phi)}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} c_{p,+\infty} (T_{+\infty} - T_\phi)} = F_a(\psi) = \frac{\rho u c_a}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} c_{a,+\infty}} = \\ &= \frac{\operatorname{erf}(\psi/\sqrt{\sigma}) - \operatorname{erf}(\psi_\phi/\sqrt{\sigma})}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi/\sqrt{\sigma})}, \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$F_{II}(\psi) = \frac{\rho u c_p (T - T_\phi)}{\rho_\phi u_\phi c_p (T_\phi - T_\infty)} = F_\phi(\psi) = \frac{\rho u c_p}{\rho_\phi u_\phi c_p} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\sigma})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}. \quad (2-11)$$

Из этих выражений первое (2-9) относится ко всей области течения, тогда как (2-10) и (2-11) относятся соответственно к зоне I и зоне II, в каждой из которых распределения плотностей потоков энthalпии и вещества подобны между собой.

Если теперь, как в § 1-4, пренебречь различием между средним (в смысле Рейнольдса) значением произведения и произведением средних, т. е. положить, например, $\overline{\rho u} \approx \bar{\rho} \cdot \bar{u}$, $\overline{\rho u^2} \approx \bar{\rho} \cdot \bar{u}^2$ и т. д., то выражения (2-9) — (2-11) с учетом равенства $\rho T = \text{const}$, а также $c_p \approx \text{const}$ представят собой уравнения, из которых можно найти распределение всех первичных величин — плотности газа, скорости, температуры и концентраций. Следует отметить, что приближение $\overline{\rho u} \approx \bar{\rho} \cdot \bar{u}$ и т. д. является общим для всех расчетов турбулентных струй и факела. По существу оно же принимается всегда при обработке опытных данных — при расчете профиля скорости и других величин — исходя из экспериментально определенных значений динамического давления ρu^2 и температуры $T = \text{const}/\rho$.

С учетом этих замечаний из выражений (2-9) — (2-11) получим квадратное уравнение относительно распределения скорости в поперечных сечениях факела:

для зоны I

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 - [m + F(1 - \omega_1)] \frac{u}{u_0} + m(1 - \omega_1) F_1 - \omega_1 F(1 - m) = 0; \quad (2-12)$$

для зоны II

$$\omega_{II} \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 - \left[m \omega_{II} + \frac{u_\phi}{u_0} (\omega_{II} - 1) F_{II} \right] \frac{u}{u_0} +$$

$$+ \frac{u_\phi}{u_0} m (\omega_{II} - 1) F_{II} - (1 - m) \omega_1 F = 0. \quad (2-13)$$

Решения этих уравнений имеют вид:

для зоны I

$$\frac{u}{u_0} = \frac{m + (1 - \omega_1) F_1 + \sqrt{[(1 - \omega_1) F_1 - m]^2 + 4(1 - m) \omega_1 F}}{2}, \quad (2-14)$$

для зоны II

$$\frac{u}{u_0} = \frac{m \omega_{II} + \frac{u_\phi}{u_0} (\omega_{II} - 1) F_{II} + \sqrt{\left[\frac{u_\phi}{u_0} (\omega_{II} - 1) F_{II} - m \omega_{II} \right]^2 + 4(1 - m) \omega_1 \omega_{II} F}}{2}, \quad (2-15)$$

где

$$\frac{u_{\Phi}}{u_0} = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2(1-m)\omega_1[1 + \operatorname{erf}(\psi_{\Phi})]}}{2}.$$

Заметим, что здесь и далее перед корнем выбран знак плюс, так как во всех случаях горения параметры ω_1 и ω_{II} больше единицы. Знак минус соответствовал бы не рассматриваемому здесь случаю эндотермического процесса (например, конденсации и т. п.).

Из распределения скорости в факеле без труда находятся все остальные переменные. Окончательные выражения для них сведены для удобства в табл. 2-1, в которой (как и в приведенных выражениях для плотности газа) обозначено:

$$\omega_1 = \frac{T_{\Phi}}{T_{+\infty}} = \frac{\rho_{+\infty}}{\rho_{\Phi}}, \quad \omega_{II} = \frac{T_{\Phi}}{T_{-\infty}} = \frac{\rho_{-\infty}}{\rho_{\Phi}}, \quad \omega = \frac{\omega_{II}}{\omega_1}, \quad m = \frac{u_{-\infty}}{u_{+\infty}}.$$

Таблица 2-1

Функция	Зона	Выражение
$\frac{u}{u_{+\infty}}$	I	$\frac{f_6 + \sqrt{f_7^2 + 4(1-m)\omega_1 F}}{2}$
	II	$\frac{f_8 + \sqrt{f_9^2 + 4(1-m)\omega_1\omega_{II} F}}{2\omega_{II}}$
$\frac{\rho u}{(\rho u)_{+\infty}}$	I	$\frac{-f_7 + \sqrt{f_7^2 + 4(1-m)\omega_1 F}}{2\omega_1}$
	II	$\frac{-f_9 + \sqrt{f_9^2 + 4(1-m)\omega_1\omega_{II} F}}{2\omega_1}$
$\frac{T - T_{+\infty}}{T_{\Phi} - T_{+\infty}} = 1 - \frac{c_a}{c_{a,+\infty}}$	I	$1 - F_1 \frac{(\rho u)_{\infty}}{\rho u}$
$\frac{T - T_{-\infty}}{T_{\Phi} - T_{-\infty}} = 1 - \frac{c_6}{c_{6,-\infty}}$	II	$\frac{u_{\Phi}}{u_0} F_{II} \frac{(\rho u)_0}{\rho u}$

Кроме того, в табл. 2-1 для краткости принято

$$f_6 = m + (1 - \omega_1) F_1, \quad f_7 = (1 - \omega_1) F_1 - m,$$

$$f_8 = u_\phi (\omega_{11} - 1) F_{11} + m \omega_{11}, \quad f_9 = u_\phi (\omega_{11} - 1) F_{11} - m \omega_{11}.$$

Выражения, приведенные в табл. 2-1, значительно упрощаются в частном случае $m = 0$, когда спутный поток отсутствует ($u_{-\infty} = 0$). Эти выражения указаны в табл. 2-2.

Таблица 2-2

Функция	Зона	Выражение
$\frac{u}{u_{+\infty}}$	I	$\frac{(1-\omega_1) F_1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1}{(1-\omega_1)^2} \cdot \frac{F}{F_1^2}} \right]$
	II	$\sqrt{\omega_1} \frac{\omega_{11}-1}{2\omega_{11}} F_{11} \sqrt{F_\phi} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{11}}{(1-\omega_{11})^2} \cdot \frac{F}{F_\phi F_{11}^2}} \right]$
$\frac{\rho u}{(\rho u)_{+\infty}}$	I	$\frac{(\omega_1 - 1) F_1}{2\omega_1} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1}{(1-\omega_1)^2} \cdot \frac{F}{F_1^2}} \right]$
	II	$\frac{1 - \omega_{11}}{2\omega_{11} \sqrt{\omega_1}} F_{11} \sqrt{F_\phi} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{11}}{(1-\omega_{11})^2} \cdot \frac{F}{F_\phi F_{11}^2}} \right]$
$\frac{T - T_{+\infty}}{T_\phi - T_{+\infty}} = 1 - \frac{c_a}{c_{a, +\infty}}$	I	$1 - \frac{(\rho u)_{+\infty}}{\rho u} \cdot \frac{\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\sigma}) - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}$
$\frac{T - T_{-\infty}}{T_\phi - T_{-\infty}} = 1 - \frac{c_b}{c_{b, -\infty}}$	II	$\frac{(\rho u)_{+\infty}}{\rho u} \cdot \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\sigma})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}{2\omega_1}}$

Полученные выражения как в общем, так и в частном случае содержат неопределенную до сих пор величину — приведенную координату фронта пламени $\psi_\phi = y_\phi / 2 \sqrt{\xi_\phi}$. Для отыскания ее следует воспользоваться условием на фронте (2-7). Вычисляя с помощью выражений, представленных в табл. 2-1, производные от концентраций топлива и окислителя, получаем

$$\frac{\partial c_a}{\partial y} = \frac{c_{a, +\infty}}{2 \sqrt{\xi}} \cdot \frac{dc_a}{d\psi} = \frac{1}{2 \sqrt{\xi}} \left[\frac{(\rho u)_{+\infty}}{\rho u} \cdot \frac{dF_I}{d\psi} + F_I \frac{d}{d\psi} \cdot \frac{(\rho u)_{+\infty}}{\rho u} \right],$$

$$\frac{\partial c_\delta}{\partial y} = \frac{c_{\delta, -\infty}}{2 \sqrt{\xi}} \cdot \frac{dc_\delta}{d\psi} = \frac{u_\phi \omega_I}{2 \sqrt{\xi}} \left[\frac{(\rho u)_{+\infty}}{\rho u} \cdot \frac{dF_{II}}{d\psi} + F_{II} \frac{d}{d\psi} \cdot \frac{(\rho u)_{+\infty}}{\rho u} \right].$$

Имея в виду, что условие (2-7) должно удовлетворяться на фронте пламени ($\rho u = \rho_\phi u_\phi$ и $F_{I\phi} = 0$, $F_{II\phi} = 1$), получаем

$$\left. \frac{\partial c_a}{\partial y} \right|_\phi = \frac{c_{a, +\infty}}{\sqrt{\pi \xi}} \omega_I \frac{u_{+\infty}}{u_\phi} \cdot \frac{\exp(-\psi_\phi^2 \sigma)}{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})},$$

$$\left. \frac{\partial c_\delta}{\partial y} \right|_\phi = - \frac{u_\phi \omega_{II} c_{\delta, -\infty}}{\sqrt{\pi \xi} [u_\phi (\omega_{II} + 1) - m \omega_{II} u_{+\infty}]} \cdot \frac{\exp(-\psi_\phi^2 \sigma)}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}.$$

Подстановка этих выражений в (2-7) приводит к трансцендентному уравнению относительно координаты фронта ψ_ϕ

$$\frac{(m + M)^2}{m + (\omega_{II} + 1) M} \cdot \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})} = \beta_1, \quad (2-16)$$

где $M = \sqrt{m^2 + 2(1-m)\omega_I(1 + \operatorname{erf} \psi_\phi)}$, а $\beta_1 = \frac{c_{a, +\infty}}{c_{\delta, -\infty}} \Omega$. Тем самым задача доведена до конца.

В случае истечения топлива в неподвижное пространство ($u_{-\infty} = 0$, $m = 0$) формула (2-16) несколько упрощается:

$$\frac{1 - \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{\sigma})} \sqrt{1 + \operatorname{erf} \psi_\phi} = \beta,$$

где

$$\beta = \frac{c_{a, +\infty}}{c_{\delta, -\infty}} \cdot \frac{\omega_{II} + 1}{\omega_{II}} \Omega \sqrt{2\omega_I}.$$

Наконец, при $m = 0$ и $\sigma = 1$ уравнение для определения координаты фронта ψ_ϕ имеет совсем простой вид:

$$\operatorname{erf} \psi_\phi = 1 + \frac{\beta(\beta - \sqrt{\beta^2 + 8})}{2}.$$

На рис. 2-2 показана зависимость $\psi_\phi(\beta)$ для нескольких значений постоянной σ и параметра m .

Как видно из рис. 2-2, эта зависимость хорошо согласуется с результатами физического анализа явления. Действительно, во всех случаях (при заданных m и σ) с ростом стехиометрического комплекса β_1 абсолютное значение координаты ψ_ϕ растет. При этом величина $\psi_\phi < 0$ (начиная с весьма малых значений комплекса). Это значит, что фронт пламени расположен в области окислителя ($y_\phi/x_\phi < 0$) и тем дальше от оси ($y = 0$), чем больше значение стехиометрического комплекса β_1 . При постоянном значении β_1 и

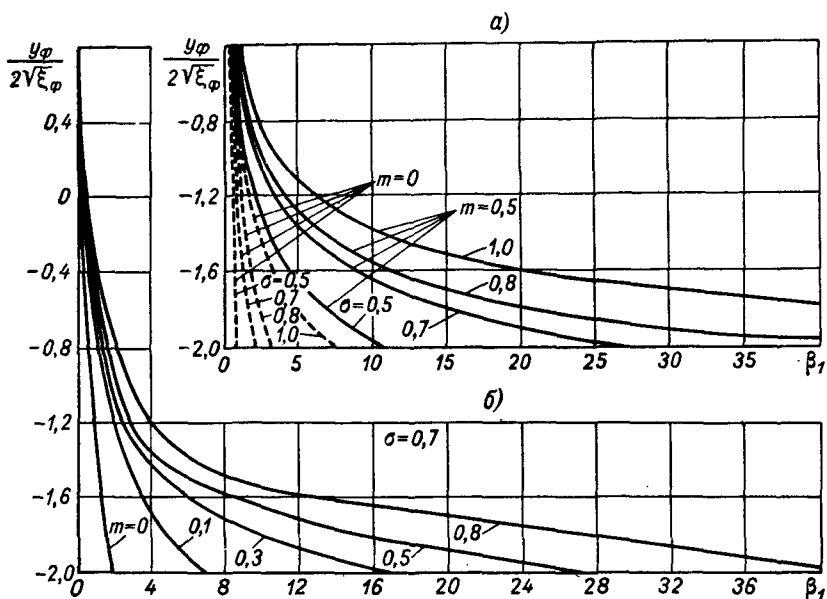


Рис. 2-2. Зависимость приведенной координаты фронта пламени от параметров β_1 , σ и m .

любом заданном значении параметра m (например, при $m = 0$ или $m = 0,5$ на рис. 2-2, а) с ростом значения σ фронт пламени смещается в сторону потока топлива, т. е. приближается к оси $y = 0$. Аналогично этому при заданных значениях β_1 и σ (например, $\sigma = 0,7$ на рис. 2-2, б) увеличение m ведет к уменьшению ψ_ϕ , поскольку ширина области смещения при сближении скорости обоих потоков уменьшается. Отметим также существенное отличие результатов расчета для $m = 0$ и $m = 0,5$.

На рис. 2-3 для примера построены профили относительных значений температуры и скорости в пограничном слое. Эти кривые иллюстрируют влияние параметра σ на местоположение фронта пламени. Следует иметь в виду, что в физических координатах это влияние будет менее заметно, поскольку изменению координаты ψ_ϕ пропорционально изменению $\arctg(y_\phi/x_\phi)$.

Для иллюстрации в табличке приведены значения углов для $m = 0,5$ (по рис. 2-3) и $m = 0$ (в расчете принято $\omega_1 = \omega_{11} = 6$, $c_{a, +\infty} = c_{\delta, -\infty} = 1$, $\Omega = 11$, а также $C = 0,025$ для $m = 0,5$ и $C = 0,04$ для $m = 0$, где $C = \sqrt{\xi}/x$; эти значения примерно соответствуют горению метана в воздухе).

σ	$m=0,5$		$m=0$	
	ψ_ϕ	$\arctg \frac{y_\phi}{x_\phi}$	ψ_ϕ	$\arctg \frac{y_\phi}{x_\phi}$
1	1,6	2°17'	2,18	4°59'
0,8	1,8	2°35'	2,83	6°27'
0,7	1,92	2°45'	3,35	7°42'

Значения эмпирических постоянных $C = C(m)$, а также σ должны быть заимствованы из опыта. Если ориентироваться на данные по струям, то $\sigma \approx 0,7 \div 0,85$.

Из приведенных примеров можно заключить, что в реальных условиях (в физической плоскости течения) трудно обнаружить влия-

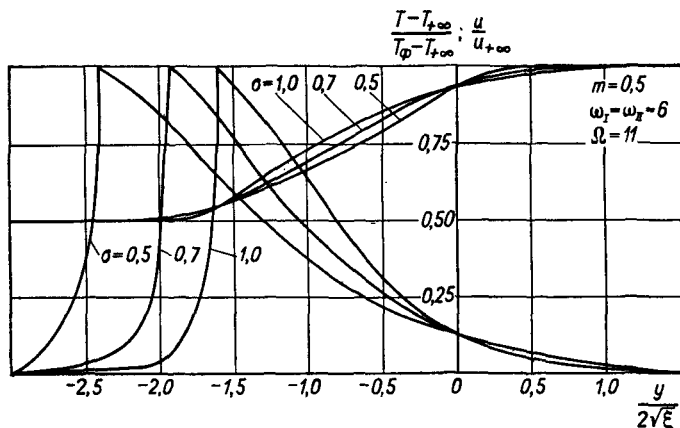


Рис. 2-3. Распределение скорости и температуры в плоском пограничном слое при горении неперемешанных газов.

ние значения σ на местоположение фронта пламени, так как точность измерений в турбулентном факеле позволяет определить координаты фронта с точностью порядка нескольких градусов.

2-3. Факел конечного размера

Обратимся теперь к более общей и сложной (неавтомодельной) задаче о развитии турбулентного диффузионного факела конечного размера. Значительную часть решения выполним для факела в спутном потоке, однако конечные расчетные выражения и их иллюстрацию приведем раздельно для затопленного факела ($u_\infty = 0$), представляющего самостоятельный практический интерес, и для

спутного факела. Это облегчит в дальнейшем сопоставление результатов расчета с опытными данными по затопленному (см. § 3-1) и спутному (см. § 3-2) турбулентным факелам.

Схема спутного факела конечного размера была показана на рис. 2-1. Пусть в движущийся со скоростью u_∞ неограниченный поток окислителя (при температуре газа T_∞ и концентрации $c_{\delta, \infty}$) из осесимметричной или плоской горелки размером y_0 вытекает струя топлива с начальной скоростью u_0 , температурой T_0 и концентрацией c_{a0} . По обе стороны замкнутого фронта пламени расположены внутренняя зона I (топливо и продукты сгорания) и внешняя зона II (окислитель и продукты сгорания). Решение проведем, как и в § 2-2, с помощью метода эквивалентной задачи теории теплопроводности. Поскольку задача о факеле конечного размера неавтомодельна (в условия ее входит размерная длина — радиус или полуширина сопла горелки y_0), безразмерные функции F_i будут зависеть от двух безразмерных координат $\xi = \xi / y_0^2$ и $y = y / y_0$ в отдельности: $F_i = F_i(\xi, y)$. В этом случае, как было указано в § 2-1, аналитическое решение неавтомодельной задачи может быть получено в предположении о равенстве единице постоянной $\sigma = \xi / \xi_0$ или, что то же, об одинаковости приведенных координат $\xi_i = \xi$. В этом приближении и будем решать задачу, объединив решение для обоих симметричных типов двухмерного (круглого или плоского) факела.

Поскольку математическая постановка задачи — исходные уравнения и граничные условия для функции F_i — была сформулирована ранее (см. § 2-1), запишем сразу решения уравнений (2-3) в безразмерном виде:

$$F_i(\xi, y) = A_i + B_i L(\xi, y). \quad (2-17)$$

Значения постоянных A_i и B_i находятся из граничных условий (2-4). В результате получим выражения для распределения основных функций во всем поле факела. В частности, распределение плотности потока избыточного количества движения в факеле будет единым для всей области течения:

$$F(\xi, y) = \frac{\rho u (u - u_\infty)}{\rho_0 u_0 (u_0 - u_\infty)} = L(\xi, y). \quad (2-18)$$

Напомним, что под функцией $L(\xi, y)$ следует понимать P -функцию для осесимметричной задачи и Φ -функцию для плоской, определенные формулами (1-27).

Для плотности потока избыточной энтальпии и вещества (конвективный поток топлива $\rho u c_a$ — в зоне I и продуктов сгорания $\rho u c_s$ — в зоне II) получим разные выражения для внутренней (I) и внешней (II) зон факела:

для зоны I

$$F_i = \frac{\rho u c_p (T - T_\phi)}{\rho_0 u_0 c_{p0} (T_0 - T_\phi)} = F_a = \frac{\rho u c_a}{\rho_0 u_0 c_{a0}} = 1 - \frac{1 - L(\xi, y)}{1 - L(\xi_\phi, y_\phi)}, \quad (2-19)$$

для зоны II

$$F_{II} = \frac{\rho u c_p (T - T_\infty)}{\rho_\phi u_\phi c_{p\phi} (T_\phi - T_\infty)} = F_\phi = \frac{\rho u c_\phi}{\rho_\phi u_\phi c_{\phi\phi}} = \frac{L(\xi, y)}{L(\xi_\phi, y_\phi)}. \quad (2-20)$$

С помощью равенств (2-18) — (2-20) можно путем алгебраического расчета определить выражения для распределения в факеле скорости течения, температуры и концентраций.

Введем обозначения:

$$m = \frac{u_\infty}{u_0}, \quad \omega_I = \frac{T_\phi}{T_0} = \frac{\rho_0}{\rho_\phi}, \quad \omega_{II} = \frac{T_\phi}{T_\infty} = \frac{\rho_{+\infty}}{\rho_\phi}.$$

Расчет выполним параллельно для обеих зон.

Из выражений (2-18) и (2-19) для зоны I и (2-18) и (2-20) для зоны II получим по два уравнения для каждой зоны с неизвестными $\rho u / (\rho u)_0$ и u/u_0 .

Для зоны I

$$\frac{\rho u}{(\rho u)_0} \left(\frac{u}{u_0} - m \right) = (1 - m) F,$$

$$\omega_I \frac{\rho u}{(\rho u)_0} - \frac{u}{u_0} = (\omega_I - 1) F_I,$$

откуда приходим к квадратному уравнению относительно скорости

$$\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 - [(1 - \omega_I) F_I + m] \frac{u}{u_0} + m(1 - \omega_I) F_I - (1 - m) \omega_I F = 0. \quad (2-21)$$

Решение уравнения (2-21) для зоны I имеет вид

$$\frac{u}{u_0} = \frac{m + (1 + \omega_I) F_I + \sqrt{[(1 - \omega_I) F_I - m]^2 + 4(1 - m) \omega_I F}}{2}. \quad (2-22)$$

Запишем также частный случай этого выражения для скорости на фронте пламени, который будет неоднократно использоваться в дальнейшем:

$$\frac{u_\phi}{u_0} = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4(1 - m) \omega_I F_\phi}}{2} \quad (2-23)$$

[(на фронте $F_{I\phi} = 0$, $F_\phi = L(\xi_\phi, y_\phi)$].

Аналогично этому для зоны II от уравнений

$$\frac{\rho u}{(\rho u)_0} \left(\frac{u}{u_0} - m \right) = (1 - m) F,$$

$$\omega_{II} \frac{\rho u}{(\rho u)_0} - \frac{u}{u_0} = \frac{u_\phi}{u_0} (1 - \omega_{II}) F_{II}$$

приходим к квадратному уравнению

$$\omega_{II} \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 - \left[m\omega_{II} + \frac{u_\Phi}{u_0} (\omega_I - 1) F_{II} \right] \frac{u}{u_0} + \frac{u_\Phi}{u_0} m (\omega_{II} - 1) F_{II} - (1 - m) \omega_I F = 0. \quad (2-24)$$

Из уравнения (2-24) получим для зоны II

$$\frac{u}{u_0} = \frac{m\omega_{II} + \frac{u_\Phi}{u_0} (\omega_{II} - 1) F_{II} \pm \sqrt{\left[\frac{u_\Phi}{u_0} (\omega_{II} - 1) F_{II} - m\omega_{II} \right]^2 + 4(1 - m) \omega_I \omega_{II} F}}{2\omega_{II}}, \quad (2-25)$$

Заметим, что на фронте пламени с учетом формулы (2-23) это равенство обращается в тождество.

Выражения (2-22) и (2-25) позволяют по найденному распределению скорости определить все однозначно связанные с ним переменные во всем поле факела.

Для удобства конечные выражения характерных величин в сокращенной записи сведены в табл. 2-3, в которой обозначены:

$$\begin{aligned} f_{10} &= 4\omega_I (1 - m) F, \quad f_{11} = (1 - \omega_I) F_I + m, \\ f_{12} &= (1 - \omega_I) F_I - m, \quad f_{13} = u_\Phi (\omega_{II} - 1) F_{II} + m\omega_{II}, \\ f_{14} &= u_\Phi (\omega_{II} - 1) F_{II} - m\omega_{II}. \end{aligned}$$

В табл. 2-4 указаны расчетные выражения для частного случая затопленного факела ($u_\infty = 0$, $m = 0$).

В выражениях, стоящих в табл. 2-3 и 2-4, функции F_i определяются через частный интеграл уравнений (1-26) — функции $L(\xi, y)$ — согласно формулам (2-18), (2-19) и (2-20). Для отыскания значений переменных на оси факела (при $y = 0$) следует воспользоваться формулами (1-31) и (1-32) соответственно для функций $P(\xi, 0)$ и $\Phi(\xi, 0)$ — для осесимметричного и плоского факела.

Перейдем теперь к определению местоположения фронта пламени в пространстве $\xi - y$. Для этой цели следует вновь воспользоваться приближенным соотношением на фронте пламени

$$-\frac{\partial c_b}{\partial \psi} \Big|_\Phi = \Omega \frac{\partial c_a}{\partial \psi} \Big|_\Phi.$$

Для краткости приведем вначале (и то в сокращенном виде) расчет для более простого частного случая затопленного факела ($m = 0$). Заметим при этом, и это относится к любому факелу конечного размера, что замена $\partial/\partial n \approx \partial/\partial y$ в условии (1-7) приводит к некоторому искажению формы факела в конечной его части. В этом приближении расчетная граница фронта $y_\Phi(\xi_\Phi)$ и соответственно $y_\Phi(x_\Phi)$ подходит к оси x под некоторым отличным от нуля углом, вершина фронта пламени в расчете оказывается заостренной.

Функция	Зона	Выражение
$\frac{u}{u_0}$	I	$\frac{f_{11} + \sqrt{f_{12}^2 + f_{10}}}{2}$
	II	$\frac{f_{13} + \sqrt{f_{14}^2 + \omega_{11} f_{10}}}{2\omega_{11}}$
$\frac{\rho u}{(\rho u)_0}$	I	$\frac{-f_{12} + \sqrt{f_{12}^2 + f_{10}}}{2\omega_1}$
	II	$\frac{-f_{14} + \sqrt{f_{14}^2 + \omega_{11} f_{10}}}{2\omega_1}$
$\frac{T - T_0}{T_\phi - T_0} = 1 - \frac{c_a}{c_{a0}}$	I	$1 - \frac{(\rho u)_0}{\rho u} F_1$
$\frac{T - T_\infty}{T_\phi - T_\infty} = 1 - \frac{c_b}{c_{b, \infty}}$	II	$\frac{(\rho u)_0}{\rho u} \cdot \frac{u_\phi}{u_0} \cdot \frac{F_{11}}{\omega_1}$

Выражение для производной концентрации топлива найти трудно:

$$\left. \frac{\partial c_a}{\partial y} \right|_\phi = \frac{\omega_1 u_0}{u_\phi} \frac{c_{a0}}{1 - L(\xi_\phi, y_\phi)} \left[\frac{\partial L(\xi, y)}{\partial y} \right]_\phi.$$

Определение производной концентрации окислителя требует некоторых дополнительных преобразований. Ввиду того, что

$$\left. \frac{\partial c_b}{\partial y} \right|_\phi = -c_{b, \infty} \left\{ \frac{1}{L(\xi_\phi, y_\phi)} \left[\frac{\partial L(\xi, y)}{\partial y} \right]_\phi - \frac{\omega_1}{u_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\rho u}{\rho_0 u_0} \right)_\phi \right\}$$

(см. табл. 2-3), вначале найдем производную величины ρu на фронте пламени. Она имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\rho u}{\rho_0 u_0} \right)_\phi = \frac{u_\phi}{u_0 \omega_1} \frac{u_\phi - m \omega_{11} u_0}{u_\phi (\omega_{11} - 1) - m \omega_{11} u_0} \frac{1}{L(\xi_\phi, y_\phi)} \left(\frac{\partial L(\xi, y)}{\partial y} \right)_\phi,$$

где u_ϕ определяется выражением (2-23).

Функция	Зона	Выражение
$\frac{u}{u_0}$	I	$\frac{(1-\omega_1) F_1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1}{(1-\omega_1)^2} \cdot \frac{F}{F_1^2}} \right]$
	II	$\sqrt{\omega_1} \frac{\omega_{11}-1}{2\omega_{11}} F_{11} \sqrt{F_\Phi} \left[1 + \right. \\ \left. + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{11}}{(1-\omega_{11})^2} \cdot \frac{F}{F_\Phi F_{11}^2}} \right]$
$\frac{\rho u}{(\rho u)_0}$	I	$\frac{(\omega_1-1) F_1}{2\omega_1} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_1}{(1-\omega_1)^2} \cdot \frac{F}{F_1^2}} \right]$
	II	$\frac{1-\omega_{11}}{2\omega_{11} \sqrt{\omega_1}} F_{11} \sqrt{F_\Phi} \left[1 + \right. \\ \left. + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{11}}{(1-\omega_{11})^2} \cdot \frac{F}{F_\Phi F_{11}^2}} \right]$
$\frac{T-T_0}{T_\Phi-T_0} = 1 - \frac{c_a}{c_{a0}}$	I	$1 - \frac{F_1}{\rho u} (\rho u)_0$
$\frac{T-T_\infty}{T_\Phi-T_\infty} = 1 - \frac{c_b}{c_{b,\infty}}$	II	$\sqrt{\frac{F_\Phi}{\omega_1}} \cdot \frac{F_{11}}{\rho u} (\rho u)_0$

С учетом последнего равенства условие (2-7) приводит к трансцендентному уравнению

$$\frac{1 - L(\xi_\Phi, y_\Phi)}{2L(\xi_\Phi, y_\Phi)} \frac{\left[m + \sqrt{m^2 + 4(1-m)\omega_1 L(\xi_\Phi, y_\Phi)} \right]^2}{m(\omega_1 - 1) + (\omega_{11} + 1) \sqrt{m^2 + 4(1-m)\omega_1 L(\xi_\Phi, y_\Phi)}} =$$

$$= \Omega \frac{\omega_1}{\omega_{11}} \frac{c_{a0}}{c_{b,\infty}}. \quad (2-26)$$

В частном случае затопленного факела ($u_{\infty} = 0$, $m = 0$) уравнение (2-26) переходит в квадратное уравнение относительно функции $L(\xi_{\phi}, y_{\phi})$:

$$L^2(\xi_{\phi}, y_{\phi}) - 2(2\beta^2 + 1)L(\xi_{\phi}, y_{\phi}) + 1 = 0.$$

Решение его имеет вид

$$L(\xi_{\phi}, y) = \left(\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta \right)^2, \quad (2-27)$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{\omega_1}(\omega_{11} + 1)c_{a0}}{2\omega_{11}c_{b,\infty}} \Omega. \quad (2-28)$$

Найденные по формуле (2-27) значения функции $L(\xi_{\phi}, y_{\phi})$, т. е. значения функций $P(\xi_{\phi}, y_{\phi})$ или $\Phi(\xi_{\phi}, y_{\phi})$ соответственно для осесимметричного или плоского затопленного факела, позволяют с помощью таблиц функций (см. приложение) определить границу фронта $y_{\phi} = y(\xi_{\phi})$ для заданного значения параметра β .

Из равенства (2-27) найдем также приведенную длину затопленного факела $\sqrt{\xi_l} = \sqrt{\xi_{\phi}}$ при $y = 0$. Для осесимметричного факела

$$\sqrt{\xi_l} = \left\{ 4 \ln \left[1 - \left(\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta \right)^2 \right] \right\}^{-1/2}. \quad (2-29)$$

При $\xi_l \gg 1$, разлагая экспоненту в ряд и ограничиваясь первым членом, получаем

$$\sqrt{\xi_l} \approx \frac{\sqrt{0,53 \sqrt{\beta^2 + 1}}}{\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta}. \quad (2-30)$$

Аналогично этому для плоского факела значение $\sqrt{\xi_l}$ можно найти из решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi_{\phi}}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta \right)^2. \quad (2-31)$$

При $\xi_l \gg 1$, используя известное разложение в ряд

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(z) = \frac{z}{0!1} - \frac{z^3}{1!3} + \frac{z^5}{2!5} - \dots \approx z \text{ для } z \ll 1 \right),$$

имеем

$$\sqrt{\xi_l} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta)^2}. \quad (2-32)$$

Для круглого факела расчетная зависимость $\sqrt{\xi_l}$ от параметра β показана на рис. 2-4.

Результаты расчета для затопленного осесимметричного факела будут в § 3-1 сопоставлены с опытом. Для плоского затопленного факела аналогичные экспериментальные данные, с которыми можно

было бы сравнить результаты расчета, отсутствуют. Заметим, однако, что и те, и другие расчетные результаты в качественном отношении согласуются с развитыми ранее (см. § 1-3) соображениями.

Возвратимся к расчету фронта пламени для общего случая спутного факела ($m \neq 0$). Уравнение (2-26) решается графически, и определяется функция $L(\xi_\phi, y_\phi)$ для заданных значений параметров задачи $\omega_I, \omega_{II}, m, \bar{\beta}$ (где $\bar{\beta} = \Omega \frac{\omega_I}{\omega_{II}} \cdot \frac{c_{a0}}{c_{b, \infty}}$). Длина спутного факела находится из очевидного условия постоянства функции $L(\xi_\phi, y_\phi)$ на поверхности фронта пламени [$L(\xi_\phi, y_\phi) = L(\xi_l, 0)$]. Отсюда имеем для осесимметричного факела

$$\sqrt{\xi_l} = \{4 \ln [1 - P(\xi_\phi, y_\phi)]\}^{-1/2}. \quad (2-33)$$

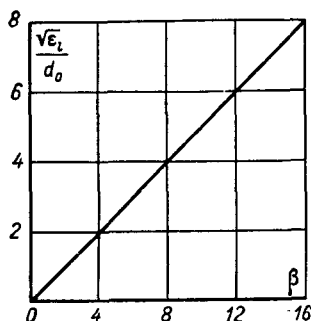


Рис. 2-4. Зависимость приведенной длины факела от стехиометрического комплекса.

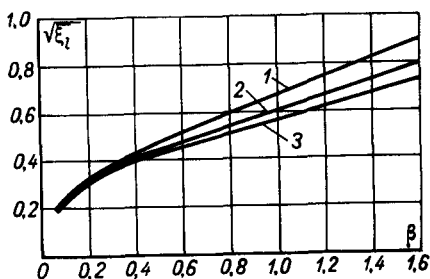


Рис. 2-5. Зависимость приведенной длины факела в спутном потоке от стехиометрического комплекса.

1 — при $m = 0,118$; 2 — при $m = 0,232$.
3 — при $m = 0,3$.

Аналогично этому для плоского факела значение $\sqrt{\xi_l}$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\xi_l}}\right) = \frac{1}{2} \Phi(\xi_\phi, y_\phi). \quad (2-34)$$

В случае длинных факелов ($\sqrt{\xi_l} \gg 1$) можно воспользоваться разложением экспоненциальной функции и функции Гаусса и получить более простые зависимости, чем (2-33) и (2-34).

В конечном счете $\xi_l = \xi_l(\beta, m, \omega_I, \omega_{II})$, т. е. зависит от четырех параметров. Тем самым решение задачи доведено до конца.

Приведем некоторые результаты расчета, иллюстрирующие полученное решение для различных значений параметров.

На рис. 2-5 показана серия кривых зависимости приведенной длины факела $\sqrt{\xi_l} = f(m, \beta)$, рассчитанных для заданных значений параметров ω_I, ω_{II} . Из графика видно, что при фиксированном

значении параметра m увеличение значения β (т. е. увеличение начальной концентрации топлива, стехиометрического числа или уменьшение концентрации окислителя в окружающей среде) приводит к возрастанию расчетной длины факела $\sqrt{\xi_l}$. При увеличении параметра m , как известно, уменьшается интенсивность турбулентного обмена. Следовательно, при росте параметра m ширина струи уменьшается [Л. 22]. Физическая причина этого состоит в том, что с увеличением скорости спутного потока (более точно — при стремлении к единице отношения $m_{\rho u^2} = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\rho_0 u_0^2}$ — см. § 4-2)

ухудшаются условия смешения реагентов, вследствие чего длина факела возрастает. Однако для количественной оценки влияния скорости спутного потока (параметра m) на длину факела необходимо наличие эмпирической зависимости $\sqrt{\xi} = f = f(\bar{x}, m)$. Эта зависимость для факела должна заимствоваться из опыта, как и при расчете турбулентных струй, путем сопоставления экспериментальной кривой изменения избыточного импульса на оси факела с теоретическим решением.

Глава третья

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

3-1. Затопленный факел

Для выяснения основных закономерностей развития прямо-струйного затопленного диффузионного турбулентного факела и сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными была исследована аэродинамическая структура газового факела [Л. 44]. Опыты проводились на трех различных установках, отличающихся друг от друга размерами. Во всех случаях газ вытекал из профилированного сопла с сильным поджатием. Это обеспечивало получение практически равномерного профиля ρu^2 и температуры на выходе из горелки и постоянство давления во всем поле течения факела. В качестве топлива на установке № 1 применялась смесь бутана с пропаном, на установке № 2 — та же смесь, балластированная продуктами сгорания этого же газа в воздухе, на установке № 3 — смесь паров бензина с продуктами сгорания, полученными при предварительном сжигании бензина с воздухом. Основные характеристики режима работы установок представлены в табл. 3-1.

В опытах проводились визуальное и фотографическое (включая стереофото съемку) наблюдения внешнего вида факела и подробное измерение профилей температуры и динамического давления ρu^2 в сечениях факела, расположенных на различном расстоянии от

Основные характеристики	Установка						№ 3
	№ 1	№ 2					
Диаметр сопла, мм	2			20			46
Скорость истечения, м/сек	50	42	61	61	61	71	70
Температура газа, °К	300	1160	1200	1300	1300	1250	1100
Температура воздуха, °К	300	300	300	300	300	300	300
Отношение температур (плотностей)	1	3,67	4,0	4,35	4,35	4,15	3,66
Максимальная температура факела, °К	1700	1900	1900	1900	1900	1900	1800
Вид топлива	Смесь бутана и пропана	Смесь бутана и пропана					Пары бензина
Концентрация топлива, кг/кг	1	0,085	0,12	0,053	0,085	0,105	0,6029

среза сопла. Измерение pu^2 осуществлялось с помощью трубок Пито, выполненных из кварца. Температура измерялась платино-платинородиевыми термопарами со спаем диаметром около 0,3 мм и проволокой диаметром 0,2 мм. В показания термопар вводилась поправка на излучение, величина этой поправки не превышала 5—7%. Каждый режим повторялся несколько раз. Воспроизводимость результатов была вполне удовлетворительной.

Приведем вначале некоторые данные визуальных наблюдений. На рис. 3-1 показана фотография факела, полученного на установке № 2. Из фотографии видно, что турбулентный факел можно условно разделить на две характерные области, существенно различные по внешнему виду и состоянию зоны горения. В первой из этих областей, расположенной вблизи сопла, диффузионный факел образует гладкую ламинарноподобную поверхность, весьма устойчивую к различного рода возмущениям. На некотором расстоянии от среза сопла (порядка 2—3 калибров) происходит заметный распад этой поверхности. При этом размеры зоны, в которой завершается переход к полностью турбулентному режиму, сравнительно малы и не превышают одного калибра. Основная часть факела, лежащая за зоной распада, имеет размытые контуры. Аналогичная картина горения диффузионного факела была ранее описана в ряде работ [Л. 91 и др.].

Наиболее подробно процесс распада присоплового пламени был рассмотрен Хоттелем и Гаусорном [Л. 33] при исследовании перехода ламинарного горения в турбулентное. Экспериментами этих авторов было показано, что при определенном значении числа Рейнольдса истекающей струи в вершине факела появляются пульсации, приводящие к разрушению ламинарного фронта. По мере

увеличения значения числа Re точка, в которой начинаются возмущения факела, перемещается по направлению к соплу, однако дальнейшее увеличение скорости истечения практически не сказывается на положении этой точки. Интересно отметить, что при больших значениях числа Re длина ламинарной части факела практически не зависит от рода газа.

Аналогичные результаты были получены в работе [Л. 96], в которой приводятся фотографии этиленового факела и сравниваются с аналогичными фотографиями негорящих струй этилена в воздухе.

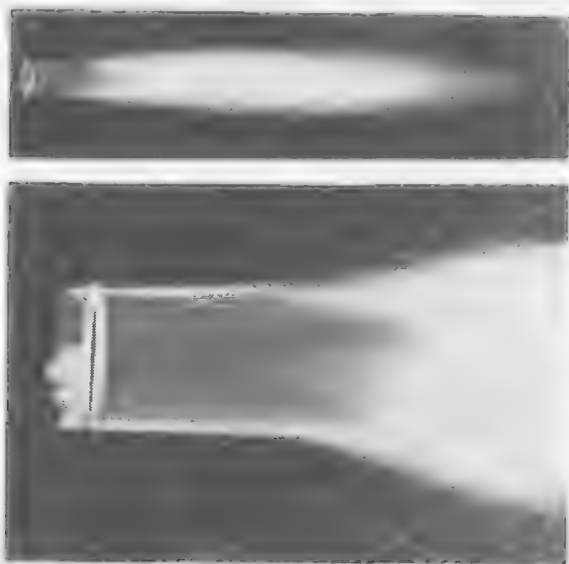


Рис. 3-1. Фотография турбулентного диффузионного факела.

Оказалось, что в негорящей струе наблюдается гладкий участок до заметной турбулизации, происходящей на некотором расстоянии от сопла.

На рис. 3-2 приведены результаты этих экспериментов в виде зависимости $h_t/d_0 = f(Re_0)$, где h_t — расстояние от устья сопла до начала видимой турбулизации струи, $Re_0 = u_0 d_0 / \nu$. Из графика видно, что в негорящем потоке место видимого распада струи при прочих равных условиях находится на более близком расстоянии от среза сопла, чем в факеле. Последнее, по мнению авторов работы [Л. 96], объясняется тем, что выделение тепла (точнее, повышение вязкости в связи с ростом температуры) оказывает стабилизирующее действие на поток. По существу к аналогичным выводам приходят и авторы работ [Л. 33; 92], также допускающие возможность существования в турбулентном факеле начальной зоны ла-

минарного горения, даже в тех случаях, когда поток на выходе из сопла полностью турбулизован. Это мнение встречается в ряде работ [Л. 14; 20 и др.], однако подробные данные о структуре присоплового участка струи и, особенно, факела в настоящее время отсутствуют.

Следует отметить некоторую противоречивость в толковании результатов упомянутых выше работ, допускающих и другую трактовку. Действительно, независимость длины участка пламени до возмущения (в области сравнительно больших значений числа Рейнольдса) от скорости истечения и от физических констант газа говорит скорее не о ламинарном, а о турбулентном режиме течения (и горения) на этом участке.

В связи с этим была предпринята попытка непосредственного исследования структуры присоплового пламени. Для этой цели было проведено качественное изучение пульсаций температуры в различных точках начального участка факела.

Пульсации температуры измерялись с помощью насадка электротермоанемометра, снабженного платиновой нитью диаметром 20 мк. Насадок работал в режиме термометра сопротивления. Изменения напряжения на концах нити подавались на вход усилителя ЭТАМ-3А и затем регистрировались на экране катодного осциллографа. Опыты показали, что в начальном участке диффузионного факела существуют довольно значительные систематические пульсации температуры. Все это свидетельствует о необходимости дальнейшего изучения режима течения в этой области.

На рис. 3-3 приведена серия стереоскопических фотографий, дающих некоторое представление о мгновенной структуре турбулентного факела. Для сравнения на рис. 3-4 показаны обычные фотографии такого же факела (установка № 1), снятые с различными экспозициями. Из стереофотографий, рассматривая их через стереоскоп, можно видеть, что в исследованных условиях горение протекает на определенных поверхностях — фронтах пламени, сложным образом распределенных внутри зоны горения. Интересно отметить, что в некоторых случаях возникающие в факеле элементарные фронты располагаются концентрически относительно друг друга. Эти наблюдения, как и результаты работы [Л. 74], говорят в пользу модели поверхностного механизма горения в турбулентном потоке.

Перейдем к рассмотрению опытных данных по распределению плотности потока импульса ρu^2 и температуры в поперечных

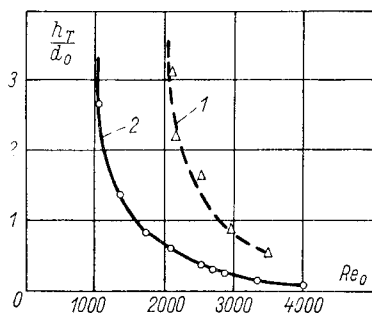


Рис. 3-2. Влияние числа Рейнольдса на местоположение критической точки.

1 — факел; 2 — газовая струя.



Рис. 3-3. Стереопhotографии турбулентного диффузионного факела ($d_0 = 2$ мм, $T_0 = 290^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 1$ кг/кг).



Рис. 3-4. Фотографии турбулентного диффузионного факела ($d_0 = 2$ мм, $c_{a0} = 1$ кг/кг, $T_0 = 290^\circ \text{K}$):
а — экспозиция 1/25 сек; б — экспозиция 1/500 сек.

сечениях диффузионного факела. На рис. 3-5 представлены опытные данные по распределению плотности потока импульса в поперечных сечениях основного и начального участков турбулентного факела, полученные на установке № 3. Как видно из графиков, в автомодельных участках турбулентного диффузионного факела, как и в струях, наблюдается универсальность профилей ρu^2 .

Общая аэродинамическая картина затопленного газового факела показана на рис. 3-6. Этот график дает наглядное представление о характере скоростных и температурных полей. Как видно из этих данных, на оси факела происходит монотонный рост температуры от ее начального значения на выходе из сопла до некоторого максимального значения,¹ соответствующего температуре го-

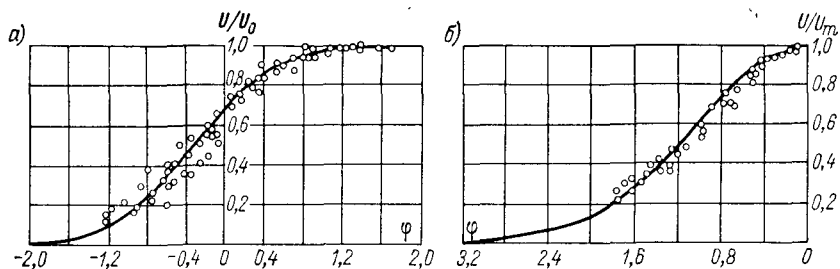


Рис. 3-5. Универсальные профили плотности потока импульса в поперечных сечениях турбулентного диффузионного факела ($U = \sqrt{\rho u^2}$): а — начальный участок; б — основной участок.

рения. За зоной горения происходит падение температуры вследствие смешения горячих продуктов сгорания с окружающим воздухом. Как видно из рис. 3-6, по мере удаления от сопла происходит выравнивание температурного поля в поперечных сечениях факела. Однако, даже на значительных расстояниях от сопла, в пределах существования фронта пламени профили температуры имеют два отчетливо выраженных максимума, свидетельствующих о наличии сравнительно узкой зоны, в которой протекает интенсивная реакция. Ширина этой зоны, как видно из распределения температуры, нарастает по мере удаления от устья факела.

Существенный интерес представляет вопрос о влиянии начальной концентрации газа (и пропорциональной ей величины теплотворности истекающей смеси) на структуру и размеры диффузионного факела. Некоторые данные, характеризующие это влияние, приведены на рис. 3-7 и 3-8. Из фотографий и графика видно, что увеличение концентрации топлива в исходной смеси приводит к

¹ Опыту, данные которого приведены на рис. 3-6, отвечает рост температуры на фронте от $\sim 1750^\circ \text{K}$ до максимального в конце факела значения $T_{\text{ф}} = 1900^\circ \text{K}$, т. е. на 7—8%. Частично это, вероятно, объясняется погрешностью измерения в начале факела (в узком фронте). Рост температуры вдоль фронта пламени следует из расчета при учете конечной скорости реакции (см. § 6-3).

удлинению и расширению факела (см. рис 3-15) и к замедленному росту температуры по оси факела.

По данным ряда исследователей [Л. 20; 33; 41 и др.], длина турбулентного факела и его форма практически не зависят от начальной скорости истечения газа. В качестве примера можно указать на приведенный выше рис.1-5, заимствованный из работы [Л.33]. Утверждения, содержащиеся в работах [Л. 58; 97], о зависимости длины турбулентного факела от скорости истечения, по-видимому, объясняются недостатками эксперимента, в частности неточностью визуального определения длины факела. Опыт показывает, что конец факела, достаточно четко определяемый по максимуму температуры на

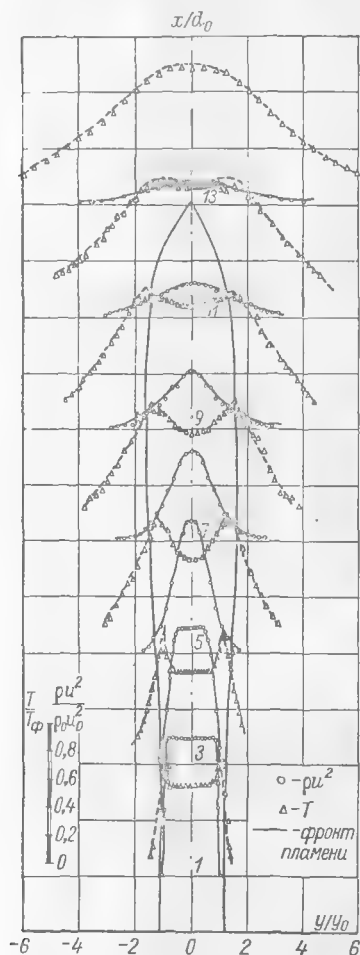


Рис. 3-6. Распределение плотности потока импульса и температуры в турбулентном факеле ($T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$).

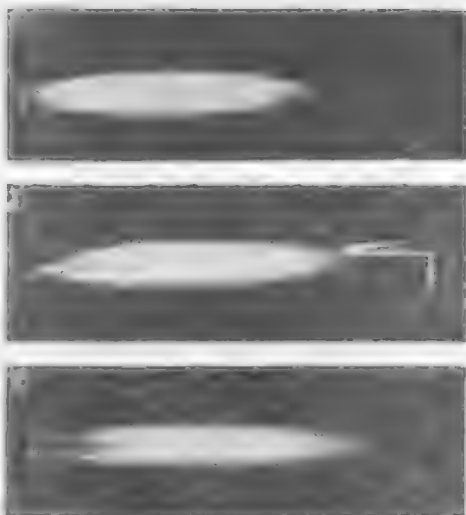


Рис. 3-7. Фотографии турбулентного диффузионного факела: а — при $c_{a0} = 0,055 \text{ кг/кг}$; б — при $c_{a0} = 0,085 \text{ кг/кг}$; в — при $c_{a0} = 0,12 \text{ кг/кг}$.

оси, не совпадает с концом светящейся зоны. Независимость длины факела от скорости вытекает из приведенного в § 2-3 расчета. Последний указывает на согласующуюся с опытом и соображениями размерности пропорциональность длины факела диаметру

сопла ($l/d = \text{const}$), а также параметру β , т. е., в частности, начальной концентрации топлива.

На рис. 3-9 приведены экспериментальные данные по изменению динамического давления ρu^2 на оси факела. Как видно из графика, относительное изменение плотности потока импульса на оси факела не зависит от скорости истечения и начальной концентрации газа и имеет такой же характер, как и в обычных турбулентных струях при отсутствии горения. Это также является подтверждением исходных положений аэродинамической теории диффузионного турбулентного факела и согласуется качественно с расчетом.

Обратимся к количественному сопоставлению результатов расчета и опыта.

На основе опытных данных по изменению динамического давления вдоль оси факела, полученных на установке № 2, была определена зависимость эффективной координаты $V_{\xi} = f(\bar{x})$, показанная на рис. 3-10. Как видно из графика, в турбулентном диффузионном факеле эта зависимость имеет такой же характер, как и в газовой струе без горения [Л. 22]. При этом для затопленного факела в автомоделной области течения величина $1/\xi$ является практически ли-

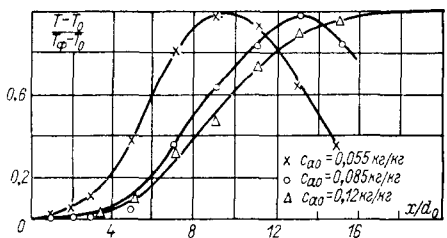


Рис. 3-8. Изменение температуры по оси осесимметричного турбулентного факела ($T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$).

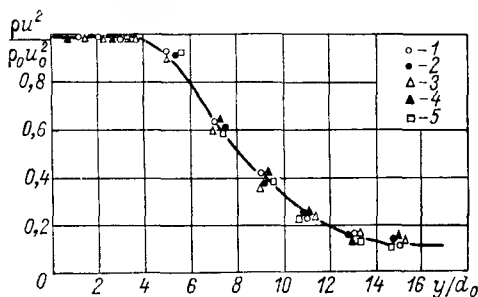


Рис. 3-9. Изменение плотности потока импульса по оси турбулентного диффузионного факела.

1 — при $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,053 \text{ кг/кг}$; $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 2 — при $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 3 — при $T_0 = 1200^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,12 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 4 — при $T_0 = 1100^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 42 \text{ м/сек}$; 5 — $T_0 = 1250^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,105 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 70 \text{ м/сек}$.

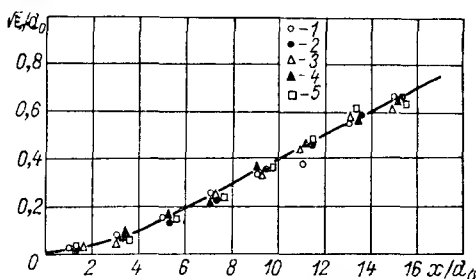


Рис. 3-10. Зависимость $V_{\xi} = f(\bar{x})$ для затопленного газового факела.

1 — при $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,053 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 2 — при $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 51 \text{ м/сек}$; 3 — при $T_0 = 1200^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,12 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 51 \text{ м/сек}$; 4 — при $T_0 = 1100^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 42 \text{ м/сек}$; 5 — при $T_0 = 1250^\circ \text{K}$, $c_{A0} = 0,105 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 70 \text{ м/сек}$.

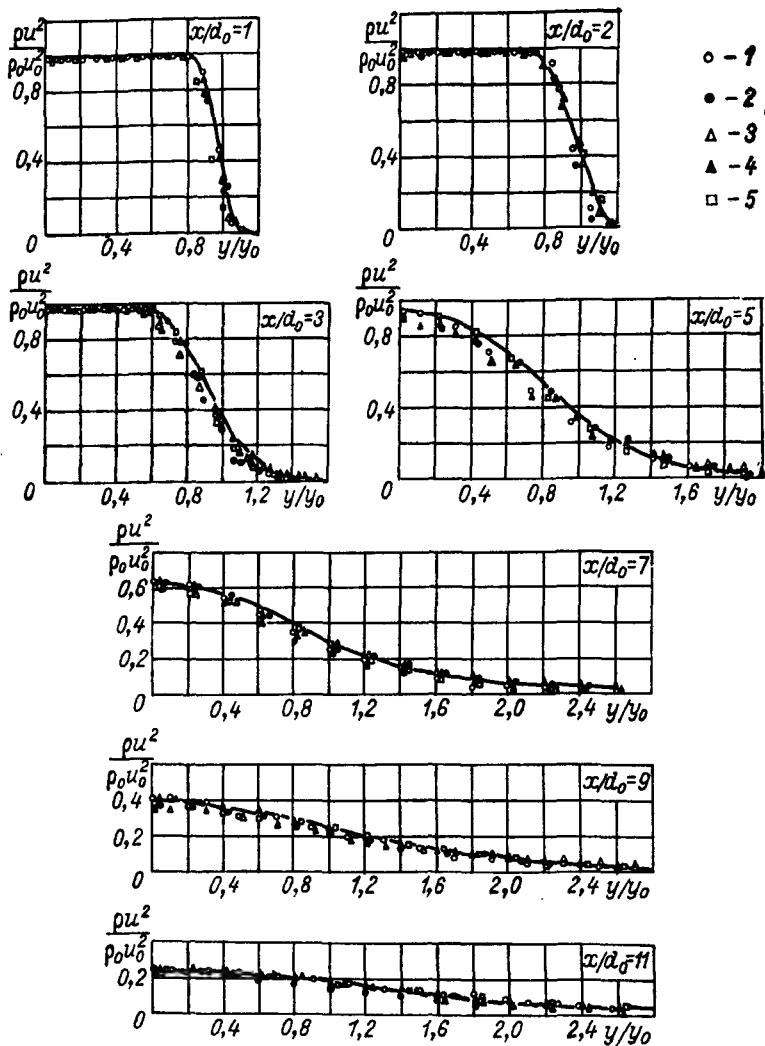


Рис. 3-11. Распределение плотности потока импульса в поле течения турбулентного диффузионного газового факела.

1 — при $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,053 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 2 — при $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 3 — при $T_0 = 1200^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,12 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$; 4 — при $T_0 = 1100^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,085 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 42 \text{ м/сек}$; 5 — при $T_0 = 1250^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,105 \text{ кг/кг}$, $u_0 = 70 \text{ м/сек}$.

нейной функцией продольной координаты x . Значение коэффициента пропорциональности C в формуле $\sqrt{\bar{\xi}} = Cx$ по данным опытов на этой и других установках оказалось равным $C \approx 0,039 \div 0,043$. В качестве среднего значения, как и для расчета струй, можно принять $C \approx 0,04$.

По экспериментальной зависимости $\sqrt{\bar{\xi}} = f(\bar{x})$ сопоставлялись результаты расчета, выполненного по методу эквивалентной задачи теории теплопроводности для $\sigma = 1$, с данными эксперимента.

В качестве примера на рис. 3-11 показаны расчетные и опытные профили относительных значений ρu^2 в поперечных сечениях факела. Наблюдается практически во всех случаях хорошая сходимость расчетных и непосредственно измеренных значений. Тем самым подтверждается одно из основных положений расчета — универсальность распределения ρu^2 в факеле и струях.

На рис. 3-12, 3-13 и 3-14 приведены данные по распределению температуры. Здесь наряду с качественным совпадением наблюдается удовлетворительная сходимость количественных результатов во внутренней зоне и некоторое отклонение расчета от опытных данных во внешней зоне факела. Заметно также, что по мере удаления от устья факела максимум температуры становится более пологим, а зона максимальной температуры расширяется. Этим и прежде всего тем, что в расчете не учтено различие в интенсивности переноса импульса и тепла (т. е. неравенство $\sigma < 1$), следует объяснить наблюдаемые расхождения опытных и расчетных данных.

Расчетные очертания фронта пламени для трех различных значений начальной концентрации топлива изображены на рис. 3-15. На графике также нанесены экспериментальные точки (по максимуму температуры). Как видно из рисунка, совпадение расчета с опытом достаточно хорошее: расхождение в длине факела не превышает 10—15%, т. е. близко к пределам точности измерений.

Для сравнения на рис. 3-15 для одного из примеров ($c_{a0} = 0,12 \text{ кг/кг}$) нанесена также линия фронта пламени, рассчитанная по холодному смещению (из условия $\sigma = 1$ при $\alpha = 1$) по формуле

$$L(\xi, y)_{\alpha=1} = \{[\omega(1 + \Omega)c_{a0} + (1 - \omega)](1 + \Omega)c_{a0}\}.$$

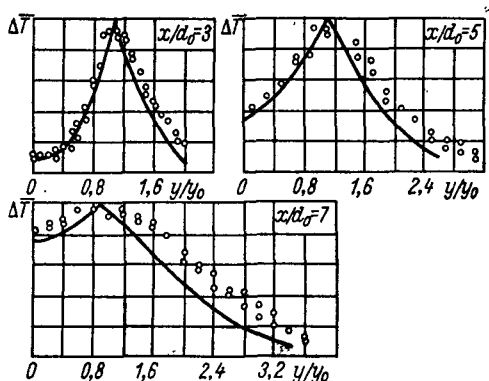


Рис. 3-12. Сравнение расчетного распределения температуры в факеле с экспериментальным ($c_{a0} = 0,055 \text{ кг/кг}$; $T_0 = 1300^\circ \text{ К}$, $u_0 = 61 \text{ м/сек}$).

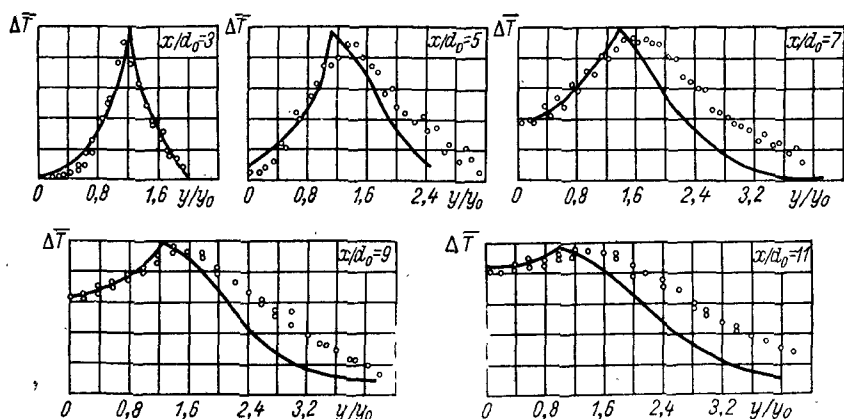


Рис. 3-13. Сравнение расчетного распределения температуры в факеле с экспериментальным ($c_{a0} = 0,085$ кг/кг; $T_0 = 1300^\circ$ К, $u_0 = 61$ м/сек).

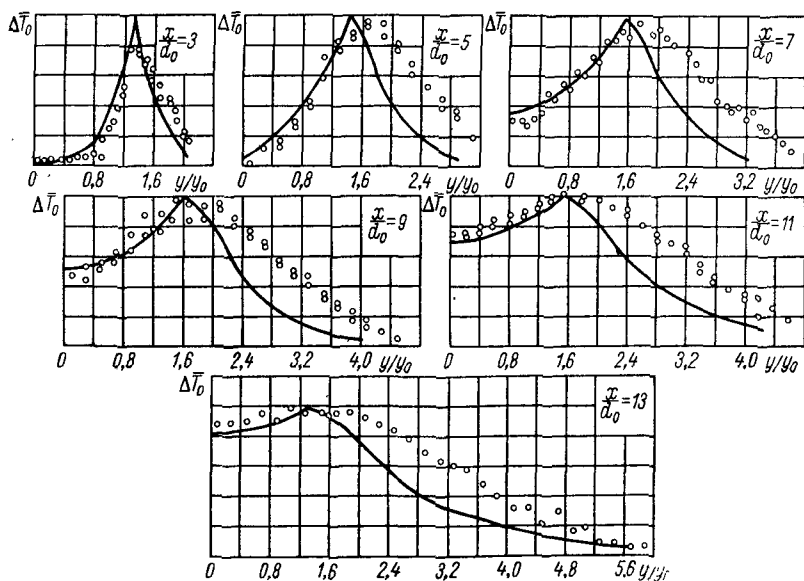


Рис. 3-14. Сравнение расчетного распределения температуры в факеле с экспериментальным ($c_{a0} = 0,12$ кг/кг, $T_0 = 1210^\circ$ К, $u_0 = 61$ м/сек).

Как видно из графика, результаты такого расчета резко отличаются от опытных. Поэтому предположение о совпадении фронта пламени со стехиометрической поверхностью (при смещении без горения), встречающееся в некоторых работах [Л. 93; 106], непригодно для количественного расчета.

Результаты сопоставления, как следует из приведенных данных, свидетельствуют об эффективности приближенного метода расчета и, в частности, о том, что сделанные в расчете допущения не вносят существенных искажений. Такой расчет позволяет опреде-

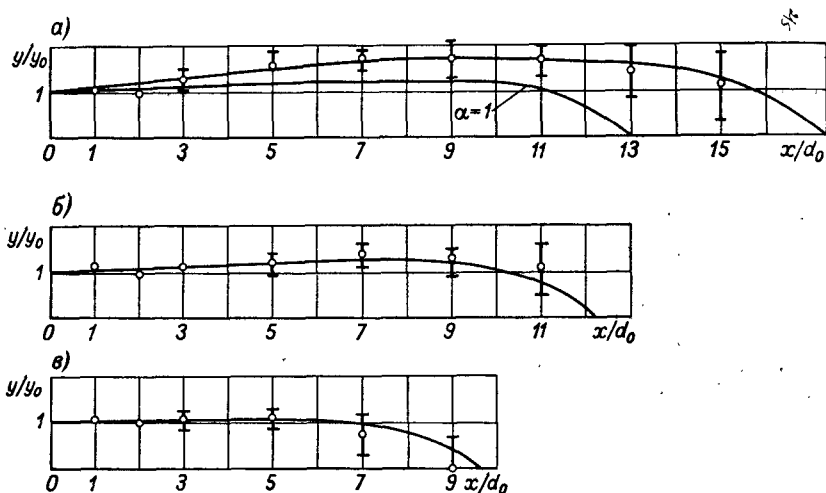


Рис. 3-15. Сравнение расчетной (сплошная линия) и экспериментальной (точки) конфигурации фронта пламени: а, б, в — соответственно для условий на рис. 3-14, 3-13, и 3-12; пунктир — расчет стехиометрической поверхности при смещении без горения (для случая а).

лить с точностью 10—15% длину факела, конфигурацию фронта пламени и, наконец, профили основных переменных. Тем самым подтверждается целесообразность использования расчетного метода эквивалентной задачи (при $\sigma = 1$) для приближенного инженерного расчета факела.

При дальнейшем развитии расчета и эксперимента можно будет учесть действительное значение σ и прийти к лучшему согласию результатов расчета и опытов.

3-2. Факел в спутном потоке

Рассмотрим теперь экспериментальные данные, относящиеся к развитию турбулентного диффузионного факела в спутном однородном потоке. Исследование такого факела проводилось на экспериментальной установке, снабженной коаксиальными соплами.

Диаметр внутреннего сопла, из которого вытекало газообразное топливо (как и в случае затопленного факела, смесь пропана и бутана, забалластированная продуктами сгорания этого же топлива с воздухом), был равен 20 мм. На расстоянии 3—4 мм от сопла устанавливался стабилизатор в виде кольца диаметром 20 мм и толщиной 0,5 мм. Диаметр внешнего сопла, из которого вытекал поток воздуха (имитировавший неограниченный спутный поток),¹ был равен 250 мм. Это обеспечивало возможность исследования факела, развивающегося практически независимо от перемешивания с окружающим воздухом, происходившего на внешней границе спутного потока. Методика измерений температуры, а также динамического давления при изучении спутного факела была аналогичной методике измерений в затопленном факеле. В табл. 3-2 приведены характеристики опытов.

Таблица 3-2

Параметр	Номер опыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_u	0,118	0,161	0,187	0,232	0,25	0,275	0,30	0,187	0,187
$m_{\rho u^2}$	0,0565	0,10	0,142	0,208	0,244	0,292	0,342	0,143	0,137
$T, ^\circ\text{K}$	1210	1180	1210	1150	1180	1170	1140	1230	1180
$c_{a0}, \text{кг/кг}$	0,083	0,089	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,085	0,12

В этой таблице наряду со значениями параметра $m - u_\infty/u_0$, входящего в расчетные формулы, указаны также значения отношения $m_{\rho u^2} - \rho_\infty u_\infty^2/\rho_0 u_0^2$. Последнее в значительной мере определяет интенсивность процесса турбулентного перемешивания газовых струй и, в частности, длину факела, развивающегося в спутном потоке (см. также § 4-2).

В этих опытах начальная температура газа и температура воздуха в спутном потоке менялись незначительно.

На рис. 3-16 приведена серия фотографий факела, полученных при различных значениях параметра m_u . Как видно из фотографий, увеличение этого параметра существенно влияет на размеры и конфигурацию факела лишь в области малых его значений — при $0 < m_u < 0,15$ или $0 < m_{\rho u^2} < 0,1$. Дальнейшее увеличение скорости спутного потока в этих опытах практически не вызывало увеличения длины факела и изменения его ширины. Это может быть иллюстрировано представленными на рис. 3-17 опытными профилями избыточного импульса ρu ($u - u_\infty$) и температуры в факеле при изменении параметра m_u . Как видно из приведенных

¹ В следующей главе будут приведены данные по коаксиальным струям и факелам с разными размерами наружного сопла, в том числе такими, когда внутренняя и внешняя области смешения перекрывались.

графиков, относительные профили температуры и избыточного импульса слабо зависят от параметра m_{μ^2} в области $m_{\mu^2} \approx 0,1$.

Это наблюдение подтверждается результатами специальных опытов, в которых производилось измерение температуры в фик-

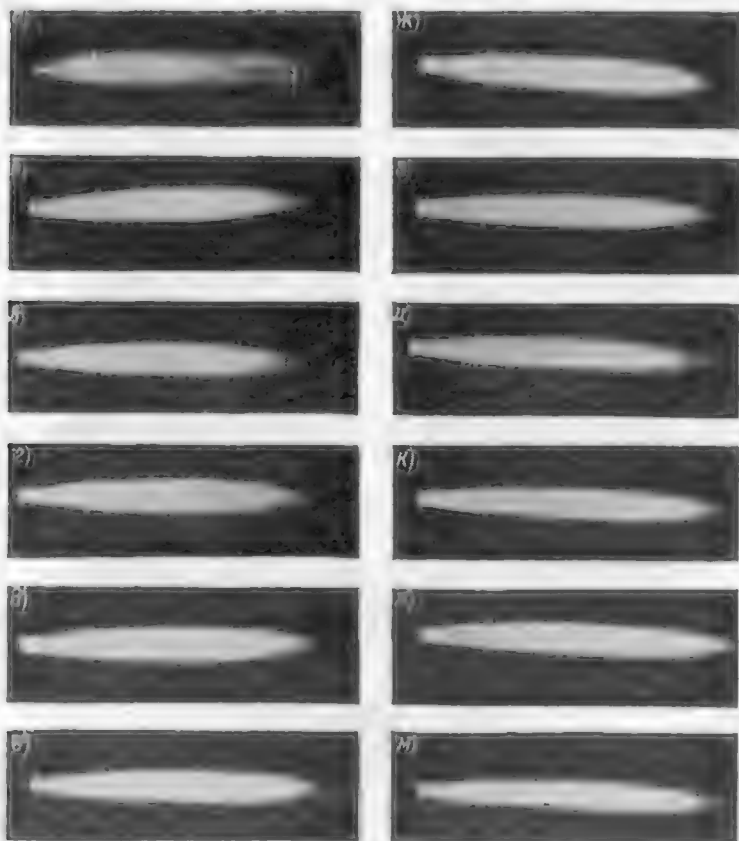


Рис. 3-16. Фотографии диффузионного факела, развивающегося в спутном однородном потоке: а — при $m_{\mu} = 0$; б — при $m_{\mu} = 0,078$; в — при $m_{\mu} = 0,10$; г — при $m_{\mu} = 0,136$; д — при $m_{\mu} = 0,175$; е — при $m_{\mu} = 0,202$; ж — при $m_{\mu} = 0,23$; з — при $m_{\mu} = 0,252$; и — при $m_{\mu} = 0,275$; к — при $m_{\mu} = 0,303$; л — при $m_{\mu} = 0,32$; м — при $m_{\mu} = 0,345$ ($T_0 = 1200^\circ \text{K}$, $c_0 = 0,083 \text{ кг/кг}$, $d_0 = 20 \text{ мм}$).

сированных точках факела. Опыты показали, что заметное влияние скорости спутного потока на характеристики факела наблюдается лишь при относительно малых значениях параметра m_{μ^2} и соответственно малых значениях m_{μ} .

Из фотографий, приведенных на рис. 3-18, видно, что с увеличением скорости спутного потока зона интенсивной турбулизации

факела (точка распада присоплового пламени) смещается к соплу. Последнее, по-видимому, связано с обтеканием внешним потоком стабилизатора пламени.

Приведем теперь результаты измерений температуры и плотности потока импульса в спутном факеле.

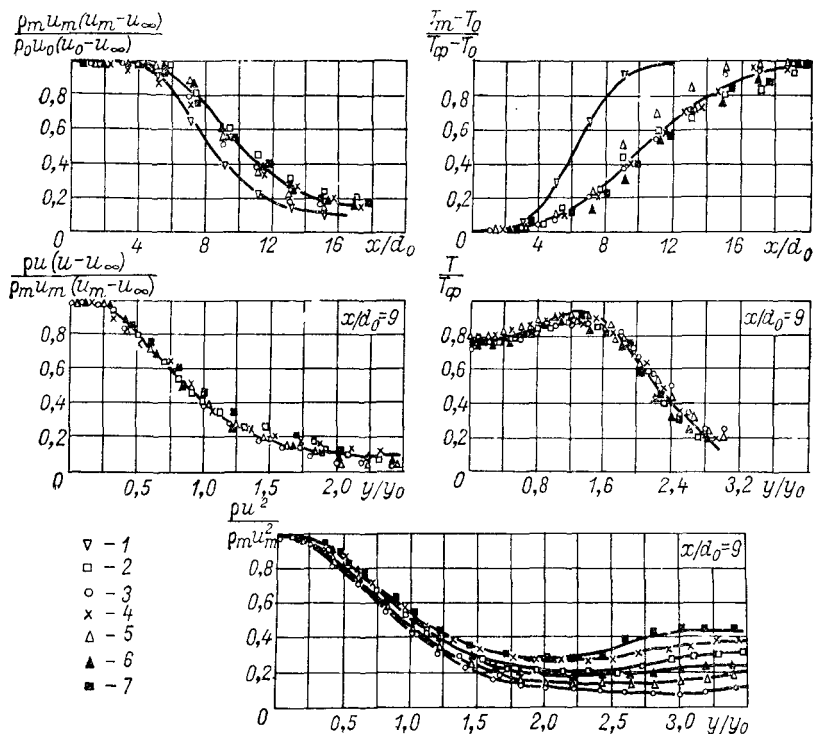


Рис. 3-17. Распределение избыточного импульса, температуры и ρu^2 в спутном диффузионном факеле.

1 — при $m_u = 0$, $T_0 = 1300^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; 2 — при $m_u = 0,232$, $T_0 = 1150^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; 3 — при $m_u = 0,118$, $T_0 = 1210^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; 4 — при $m_u = 0,25$, $T_0 = 1180^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; 5 — при $m_u = 0,161$, $T_0 = 1170^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; 6 — при $m_u = 0,187$, $T_0 = 1210^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; 7 — при $m_u = 0,275$, $T_0 = 1170^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$.

На рис. 3-19 показана полная аэродинамическая картина турбулентного диффузионного факела при горении газа в спутном однородном потоке. На графике нанесены экспериментальные поля динамического давления, температуры, а также поля избыточной скорости, импульса, линии тока и граница фронта пламени, рассчитанная по формуле (2-27а). Обращает на себя внимание своеобразный характер изменения динамического давления в поперечных сечениях факела. Как видно из графика, в профиле ρu^2 имеются

два экстремума — максимум на оси факела и минимум, расположенный на некотором расстоянии от оси, зависящем от значения m_{cu} . При этом точки, в которых pu^2 достигает минимального значения, не совпадают с зоной максимальных температур — фронтом пламени — и смещены относительно последнего в сторону однородного потока.

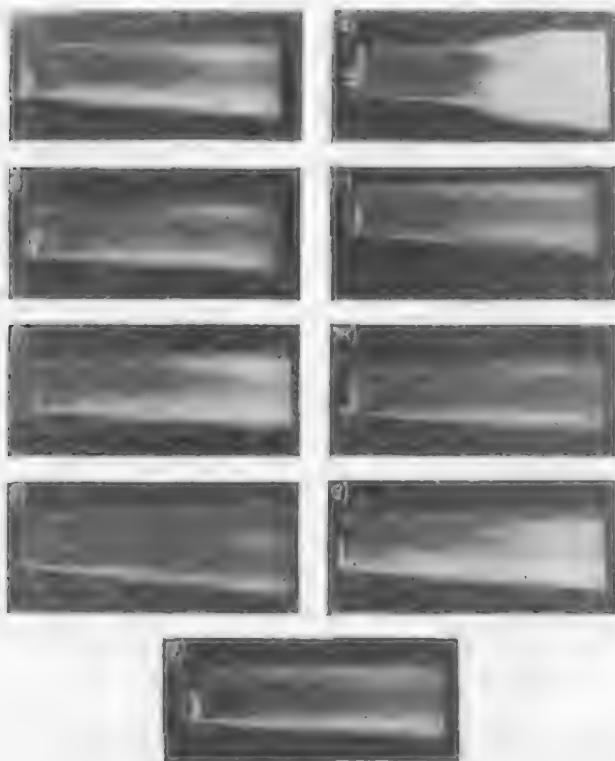


Рис. 3-18. Фотографии начального участка турбулентного диффузионного факела, развивающегося в спутном потоке: а — при $m_u = 0$; б — при $m_u = 0,0245$; в — при $m_u = 0,41$; г — при $m_u = 0,078$; д — при $m_u = 0,123$; е — при $m_u = 0,172$; ж — при $m_u = 0,23$; з — при $m_u = 0,285$; и — при $m_u = 0,37$.

В отличие от этого профили избыточного импульса pu (u — u) имеют плавный характер (без второго экстремума) и практически не зависят от m (см. рис. 3-21). Это оправдывает введение в расчет факела таких сложных характеристик, как избыточный импульс, поток избыточной энтальпии и вещества. Приведенные на рис. 3-20 данные по распределению избыточной скорости показывают, что

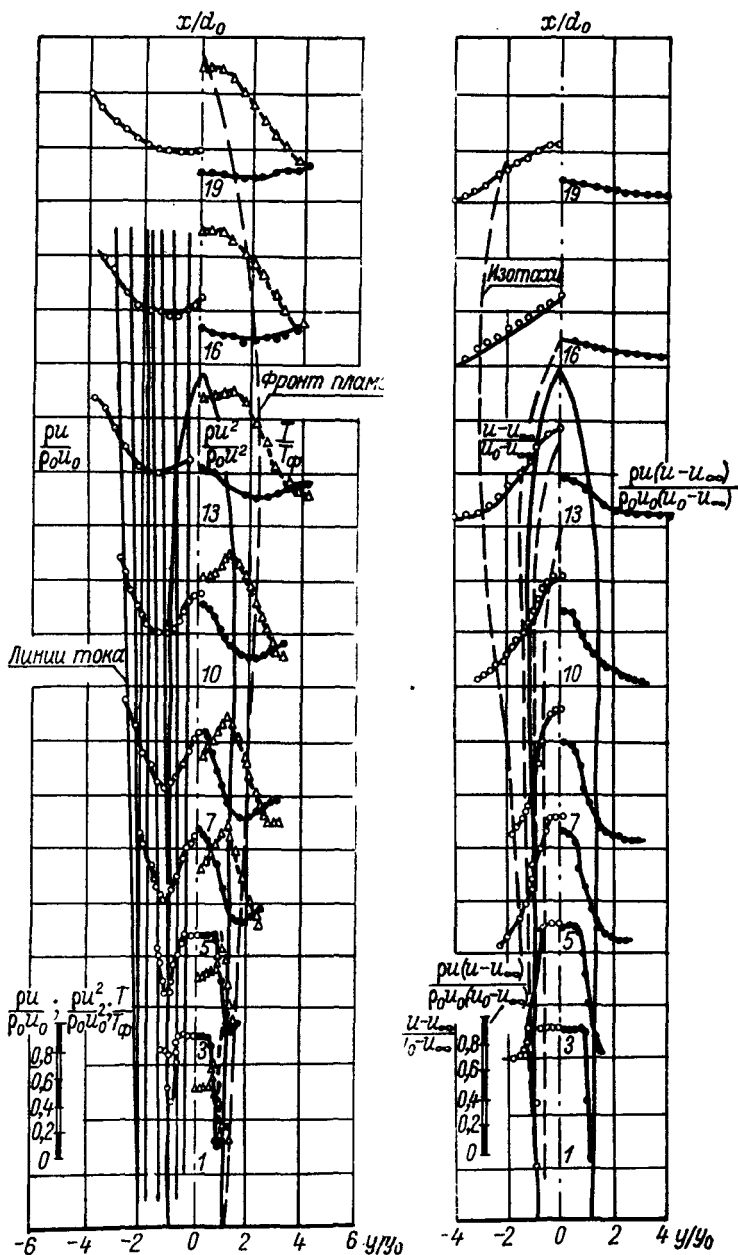


Рис. 3-19. Аэродинамическая структура турбулентного диффузионного факела в спутном потоке ($m_u = 0,3$, $T_0 = 1140^\circ \text{ K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$). Конфигурация фронта пламени рассчитана по формуле (2-16).

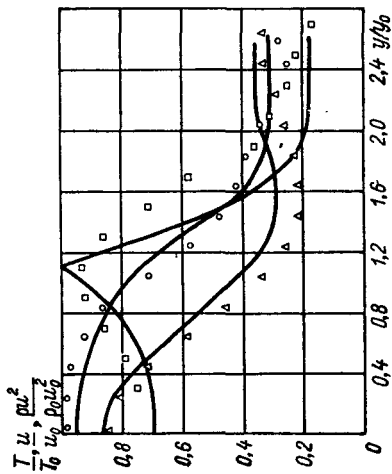
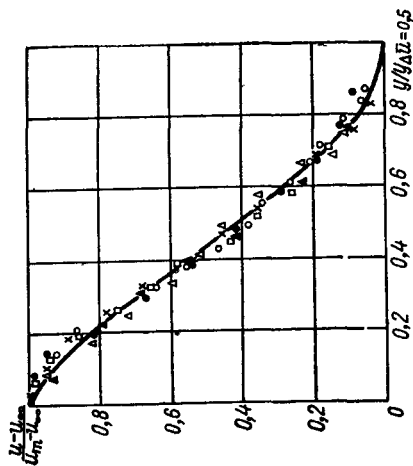


Рис. 3-20. Изменение избыточной скорости в поперечных сечениях спутного факела (сплошная линия — расчет по формуле Шлихтинга).

Рис. 3-21. Сопоставление расчетных (сплошная линия) и экспериментальных (точки) данных по изменению избыточного импульса в спутном факеле. ($T_0 = 1140^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$; $m = 0,3$).

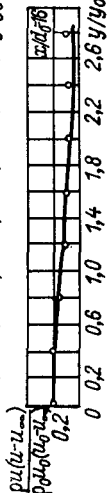
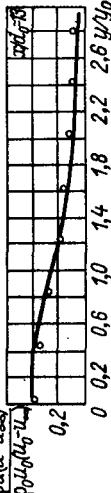
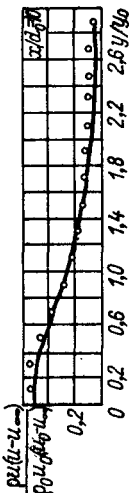
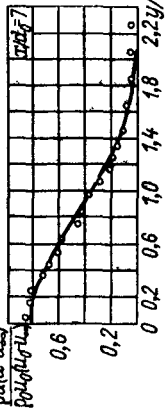
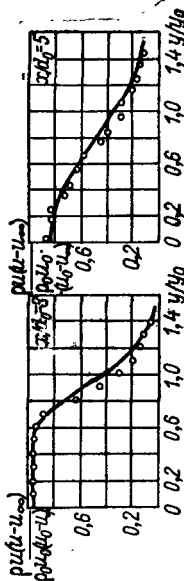


Рис. 3-22. Сопоставление расчетных (сплошная линия) и экспериментальных (точки) данных по изменению скорости, температуры и ρu^2 в спутном факеле ($T_0 = 1140^\circ \text{K}$, $c_{a0} = 0,083 \text{ кг/кг}$, $m = 0,3$; $x/d_0 = 7$).

профили $\frac{u - u_\infty}{u_m - u_\infty}$ в основном участке могут быть описаны, например, универсальной формулой Г. Шлихтинга [Л. 94]

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_m} = \left[1 - \left(\frac{y}{y_{1/2}} \right)^{3/2} \right]^2.$$

На рис. 3-21 сопоставлены расчетные и опытные профили величины $\rho u \Delta u$ в различных сечениях факела. При расчете по методу эквивалентной задачи значение постоянной $C = \sqrt{\xi}/x$ было принято равным $C = 0,03$. При этом совпадение с опытом оказалось хорошим.

Как и в затопленном факеле, при сопоставлении расчетных и опытных профилей скорости и температуры (рис. 3-22) заметны отклонения, особенно во внешней зоне факела. В целом, однако, соответствие расчета и эксперимента следует признать удовлетворительным, а в качественном отношении, учитывая сложность задачи, — хорошим.

3-3. Пример расчета факела

Сопоставляя расчетные и опытные данные, видим, что расхождение между ними сравнительно мало и практически близко к точности измерений. Поэтому целесообразно на примере показать последовательность и порядок расчета затопленного осесимметричного газового факела конечного размера и проиллюстрировать при этом использование вспомогательных таблиц функций, приведенных в приложении. Аналогично можно выполнить расчет плоского факела или спутного (осесимметричного и плоского).

Для сравнения параллельно с расчетом диффузионного факела будут приведены результаты расчета струйного смешения тех же газов (без горения), выполненного по формулам § 1-4. Для наглядности пример расчета факела представлен в виде таблиц и графиков.

Исходные данные. Топливо — метан (в смеси с азотом), концентрация топлива в смеси $c_{a0} = 0,1 \text{ кг/кг}$, начальная температура газа $T_0 = 700^\circ \text{ К}$, окислитель — воздух ($c_{b, \infty} = 1$), начальная температура воздуха $T_\infty = 360^\circ \text{ К}$.

Расчетные характеристики. Стехиометрическое число $\Omega = 11$, теоретическая температура горения $T_\phi = 1900^\circ \text{ К}$, значения параметров: $\omega_1 = T_\phi/T_0 = 2,7$, $\omega_{11} = T_\phi/T_\infty = 5,27$, стехиометрический комплекс

$$\beta = \Omega \frac{c_{a0}}{c_{b, \infty}} \sqrt{\omega_1} \frac{\omega_{11} + 1}{2\omega_{11}} = 1,08.$$

Расчет изменения ρu^2 . По формуле (1-31) находим изменение отношения $(\rho u^2)_m/(\rho u^2)_0$ по оси факела. Результаты расчета, общие для факела и струи, приведены в табл. 3-3.

Изменение отношения $\rho u^2/\rho_0 u_0^2$ в поперечных сечениях факела с учетом $u_\infty = 0$ определяем по формуле (2-18), заимствуя значения функции $P(\xi, y)$ из табл. 1 приложения.

В качестве примера расчетные данные для одного поперечного сечения факела (для $x/d_0 = 8$, $\sqrt{\xi}/d_0 = 0,32$; в расчете принято $\sqrt{\xi} = 0,04 x$) приведены в табл. 3-4 и на рис. 3-23. Полученное из расчета распределение ρu^2 относится к факелу или инертной газовой струе.

Таблица 3-3

x/d_0	0	1	2	4	6	8	
$\sqrt{\xi_u}/d_0$ $(\rho u^2)_m/(\rho u)_0$	0 1	0,04 1	0,08 1	0,16 0,913	0,24 0,662	0,32 0,457	Струя, факел
x/d_0	10	12	14	16	18	20	
$\sqrt{\xi_u}/d_0$ $(\rho u^2)_m/(\rho u^2)_0$	0,4 0,324	0,48 0,239	0,56 0,181	0,64 0,142	0,72 0,113	0,8 0,093	Струя, факел

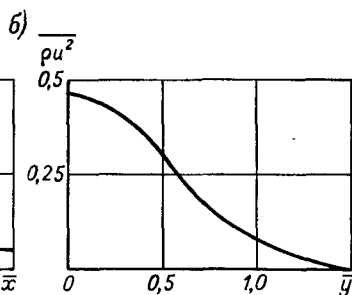
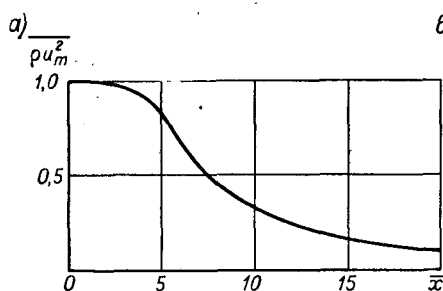


Рис. 3-23. Результаты расчета распределения ρu^2 в затопленных факеле и струе: а — изменение ρu^2 по оси течения; б — изменение ρu^2 в поперечном сечении $x/d_0 = 8$.

Таблица 3-4

y/d_0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
$\rho u^2/(\rho u^2)_0$	0,457	0,449	0,425	0,389	0,344	Струя, факел
y/d_0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,10
$\rho u^2/(\rho u^2)_0$	0,293	0,239	0,189	0,144	0,105	0,074
						Струя, факел
y/d_0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
$\rho u^2/(\rho u^2)_0$	0,052	0,031	0,020	0,012	0,007	Струя, факел

Расчет длины и формы факела. По формуле (2-29) определяем приведенную длину факела $\sqrt{\xi}$. Для значения $\beta = 1,08$ получаем $\sqrt{\xi} = 0,6d_0$. Следовательно, $l_f/d_0 = \sqrt{\xi}/Cd_0 = 15$.

Значение P -функции на фронте пламени $P = P(\xi_f, y_f)$ находим из формулы (2-27). При $\beta = 1,08$ получаем $P(\xi_f, y_f) = 0,16$.

Координаты фронта пламени $y_f = y(\xi_f)$ определяем с помощью табл. 1 приложения по найденному выше значению $P(\xi_f, y_f) = 0,16$. Полученные данные приведены в табл. 3-5.

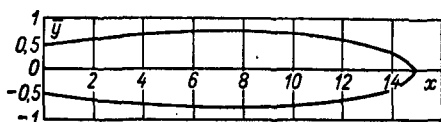


Рис. 3-24. Результаты расчета местоположения фронта пламени.

Расчетная конфигурация фронта пламени показана на рис. 3-24.

Расчет распределения температуры. Изменение температуры по оси факела находим по формуле, приведенной в табл. 2-4. При этом следует брать значение $P(\xi, 0)$ по формуле (1-31).

Результаты расчета представлены в табл. 3-6 и на рис. 3-25.

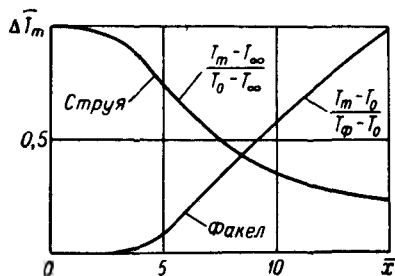


Рис. 3-25. Результаты расчета изменения температуры по оси факела и струи.

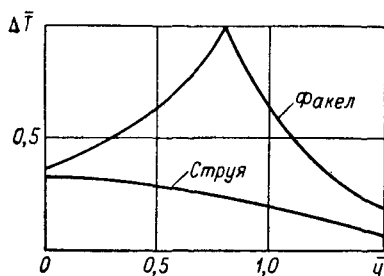


Рис. 3-26. Результаты расчета изменения температуры в поперечном сечении факела и струи.

Для сравнения в табл. 3-6 и на рис. 3-25 показано изменение температуры на оси струи при отсутствии горения, полученное по формулам из табл. 1-1.

Распределение температуры в поперечных сечениях факела (для сечения $\sqrt{\xi} = 0,32d_0$, $x = 8d_0$) определяем по формулам, приведенным в

Таблица 3-5

x_f/d_0	1	2	4	6	8	10	12	14	15
y_f/d_0	0,55	0,6	0,67	0,72	0,75	0,75	0,65	0,4	0

табл. 2-4. Значения функций $P(\xi, y)$ были найдены с помощью табл. 1 приложения.

Результаты расчета приведены для зоны I в табл. 3-7 и для зоны II — в табл. 3-8. Распределение температуры в сечении $x/d_0 = 8$ показано на рис. 3-26. Для сравнения в табл. 3-9 и на рис. 3-26 показан профиль температуры в том же сечении свободной турбулентной струи (см. табл. 1-1).

Расчет распределения концентрации топлива, окислителя и продуктов сгорания производим аналогично с помощью формул из табл. 2-4.

Таблица 3-6

x/d_0	0	1	2	4	6	8	
$\sqrt{\xi_u}/d_0$	0	0,04	0,08	0,16	0,24	0,32	Струя, факел
$\sqrt{\xi_r}/d_0$	0	0,047	0,093	0,185	0,278	0,37	
$z(\xi)$	1	1	1	0,9	0,6	0,312	
$\frac{T_m - T_0}{T_\phi - T_0}$	0	0	0	0,07	0,315	0,545	Факел
$T, ^\circ K$	1000	1000	1000	1060	1280	1490	
$\frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	1	1	1	0,84	0,62	0,46	Струя
$T, ^\circ K$	1000	1000	1000	920	810	730	

x/d_0	10	12	14	15	
$\sqrt{\xi_u}/d_0$	0,4	0,48	0,56	0,6	Струя, факел
$\sqrt{\xi_r}/d_0$	0,461	0,555	0,645	0,69	
$z(\xi)$	0,262	0,143	0,047	0	
$\frac{T_m - T_0}{T_\phi - T_0}$	0,67	0,812	0,937	1	Факел
$T, ^\circ K$	1600	1730	1840	1900	
$\frac{T_m - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	0,38	0,26	0,24	0,22	Струя
$T, ^\circ K$	690	630	620	610	

Как видно из приведенного примера расчета затопленного факела, выполнение его существенно облегчается наличием таблиц функций в приложении и связано со сравнительно простыми операциями. Поэтому принятый здесь порядок расчета может быть использован в ориентировочном инженерном расчете прямотруйного факела.

y/d_0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
$\rho u^2/(\rho u^2)_0$	0,457	0,449	0,438	0,389	0,344	0,293	0,239	0,189	0,176
$P^{0,5}(\xi_u, y)$	0,675	0,67	0,66	0,62	0,585	0,545	0,49	0,435	0,42
$1/P^{0,5}(\xi_u, y)$	1,48	1,5	1,51	1,61	1,71	1,83	2,04	2,3	2,38
$P(\xi_r, y)$	0,366	0,36	0,347	0,322	0,291	0,255	0,218	0,18	0,16
$1 - P(\xi_r, y)$	0,634	0,64	0,653	0,678	0,709	0,745	0,782	0,82	0,84
$\frac{1 - P(\xi_r, y)}{1 - P(\xi_r, \phi, y_\phi)}$	0,75	0,76	0,775	0,805	0,84	0,885	0,93	0,975	1,0
$1 - \frac{1 - P(\xi_r, y)}{1 - P(\xi_r, \phi, y_\phi)}$	0,25	0,24	0,225	0,197	0,16	0,115	0,07	0,025	0
$z(\xi, y)$	0,372	0,36	0,34	0,314	0,274	0,21	0,142	0,075	0
$\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$	0,545	0,56	0,58	0,61	0,66	0,73	0,815	0,921	1,0
$T, ^\circ K$	1490	1500	1520	1550	1590	1660	1730	1820	1900

y/d_0	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$P(\xi_u, y)$	0,105	0,074	0,05	0,031	0,02	0,01	0,007
$P^{0,5}(\xi_u, y)$	0,324	0,272	0,224	0,176	0,141	0,1	0,0755
$P(\xi_T, y)$	0,114	0,087	0,064	0,046	0,032	0,021	0,014
$P(\xi_T, y)/P^{0,5}(\xi_u, y)$	0,352	0,32	0,285	0,262	0,226	0,21	0,186
$z_1(\xi, y)$	0,92	0,84	0,75	0,685	0,59	0,55	0,49
$T - T_\infty$	0,905	0,76	0,64	0,555	0,455	0,41	0,354
$T_\phi - T_\infty$							
$T, ^\circ K$	1770	1560	1400	1280	1120	1070	1000

Таблица 3-9

y/d_0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	0,46	0,46	0,44	0,44	0,42	Струя
$T, ^\circ K$	730	730	720	720	710	

y/d_0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,91	1,0	
$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	0,4	0,36	0,336	0,34	0,290	0,260	Струя
$T, ^\circ K$	700	680	670	650	640	630	

y/d_0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$	0,22	0,2	0,17	0,14	0,102	Струя
$T, ^\circ K$	610	600	590	570	550	

Глава четвертая

КОАКСИАЛЬНЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ И ФАКЕЛ

4-1. Коаксиальные газовые струи

В технике весьма распространены газовые горелки, выполненные в виде коаксиальных сопел. Простейшая схема такой прямоструйной горелки показана на рис. 4-1. Прежде чем привести данные о горении диффузионного факела, созданного с помощью такого рода

горелки, целесообразно кратко обсудить результаты аэродинамического испытания ее без горения. Эти данные представляют также известный самостоятельный интерес, поскольку закономерности распространения коаксиальных газовых струй изучены недостаточно [Л. 7; 8; 81].

Рабочая часть установки для изучения таких струй была выполнена в виде двух коаксиально расположенных труб диаметрами 80 и 180 мм, которые заканчивались профилированными соплами [Л. 18]. Выходной диаметр внутреннего сопла во всех случаях

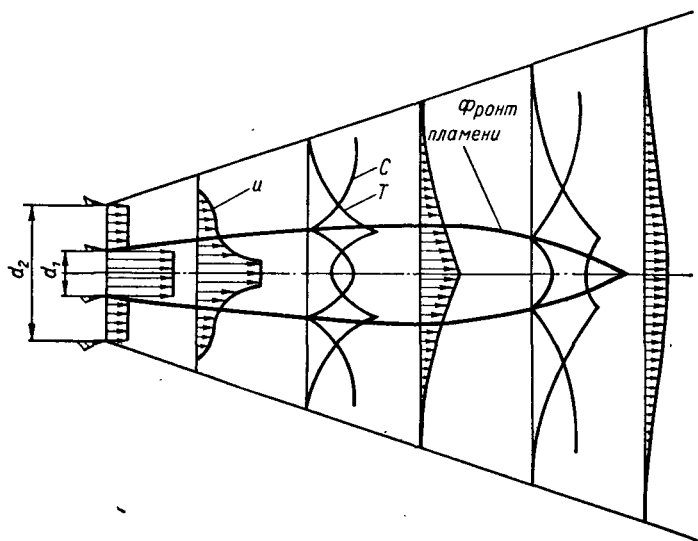


Рис. 4-1. Схема коаксиальной горелки.

оставался постоянным и равным 20 мм. Внешнее сопло в этих опытах применялось двух размеров — с диаметром на выходе, равным 40 или 60 мм.

Из внутреннего сопла происходило истечение газовой струи (продукты полного сгорания смеси пропана и бутана с воздухом) при начальной температуре $T_{0,1} = 300^\circ \text{К}$ или $T_{0,1} = 900^\circ \text{К}$, из внешнего — струи воздуха при температуре $T_{0,2} = 300^\circ \text{К}$. Параметр $\omega = T_1/T_2$ соответственно принимал значения $\omega = 1$ и 3. Скорость истечения газа из сопел изменялась для внутреннего сопла в пределах от 40 до 90 м/сек, а для внешнего — от 20 до 50 м/сек. Это обеспечивало диапазон изменения параметра $m_{\rho u^2} = (\rho u^2)_2/(\rho u^2)_1$ в пределах от 0,2 до 5 и $m = u_2/u_1$ от 0,26 до 1,29.

В опытах измерялись профили динамического давления и температуры в поперечных сечениях струи. Динамическое давление измерялось с помощью трубки Пито, наружный диаметр которой $d_n = 1,4 \text{ мм}$, а внутренний $d_{вн} = 0,8 \text{ мм}$. Трубка была сделана

из жаропрочной стали. Измерение температуры проводилось термопарой нихром — константан с диаметром спая 0,4 мм. Профили ρu^2 и температуры на выходе из сопла показаны на рис. 4-2. Как видно из графика, на стыке двух потоков — центрального и периферийного — наблюдалось сравнительно незначительное нарушение равномерности профиля ρu^2 . Однако (см. рис. 4-6) начальная неравномерность профиля сглаживалась уже на расстоянии порядка одного калибра.

На рис. 4-3 представлены результаты измерений изменения величин ρu^2 и температуры на оси коаксиальной струи (для обоих

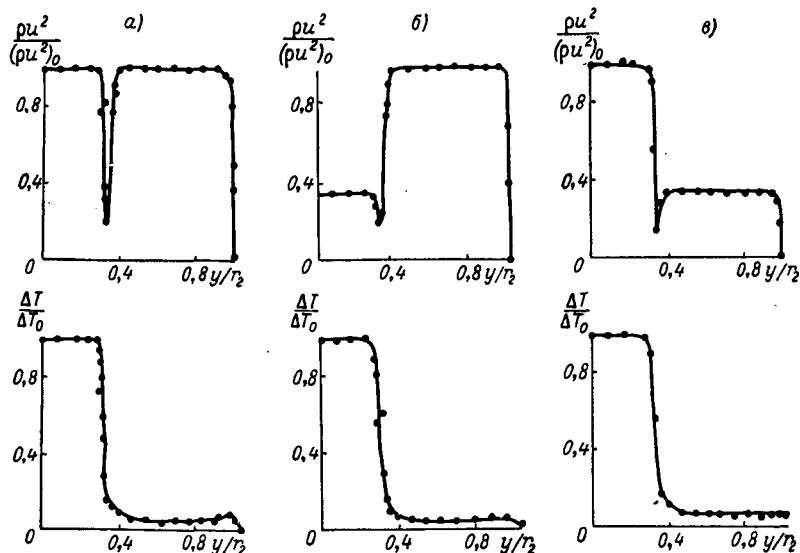


Рис. 4-2. Распределение $\overline{\rho u^2}$ и $\overline{\Delta T}$ на выходе из коаксиальной горелки: а — при $m_{\rho u^2} = 1$; б — при $m_{\rho u^2} = 3$; в — при $m_{\rho u^2} = 0,33$.

значений диаметров наружного сопла). Для сравнения на рис. 4-4 показаны рассчитанные значения скорости на оси струи для тех же случаев, а на рис. 4-5 (для сопла диаметром 60 мм) — кривые изменения относительных значений $(\rho u)_m$ и $(\rho u_r \Delta T)_m$ на оси струи. Эти данные характеризуют интенсивность турбулентного перемешивания газовых струй. Подробно этот вопрос будет обсуждаться в следующем параграфе. Здесь же обратим внимание на то, что во всех случаях интенсивность смешения тем меньше, чем ближе к единице параметр $m_{\rho u^2}$. Это замечание относится ко всем характеристикам смешения на оси струи, т. е. к относительным значениям ρu^2 , T , $\rho u_r \Delta T$ (в пределах начального участка внешней струи). О закономерностях изменения скорости и плотности потока массы ρu в опытах было установлено следующее. Каждая из этих величин

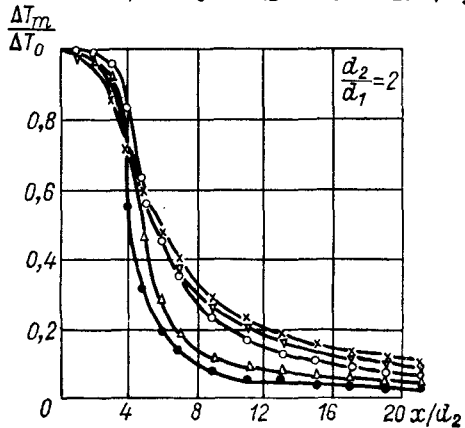
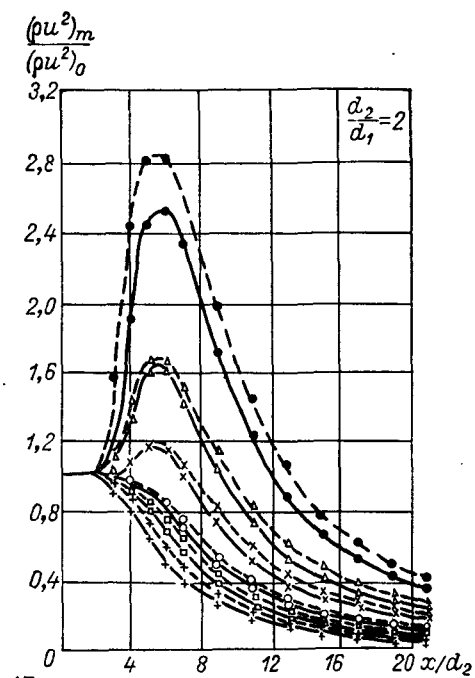
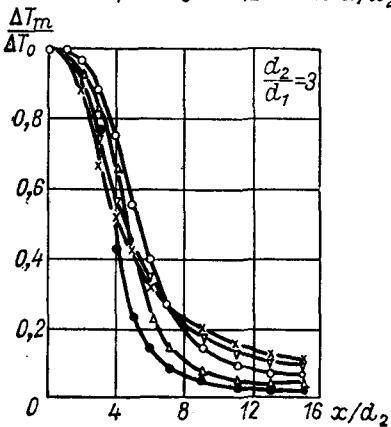
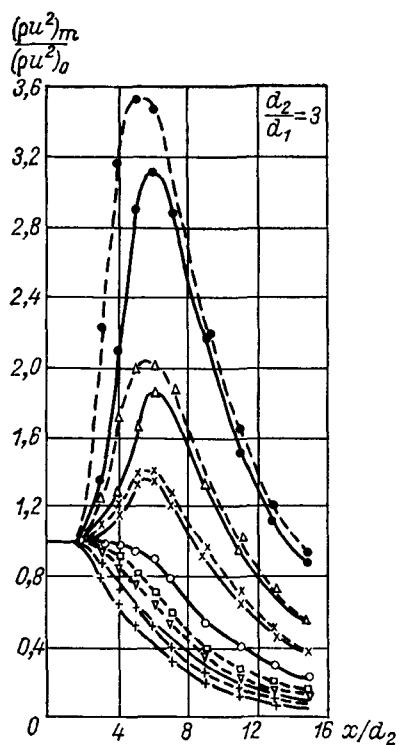


Рис. 4-3. Изменение $\overline{\rho u_m^2}$ и $\Delta \bar{T}_m$ по оси коаксиальной струи.
 — $\omega = 3$; — $\omega = 1$.

Рис. 4-4. Изменение скорости по оси коаксиальной струи при разных значениях параметра m_{pu^2} ($\omega = 3$, $d_2/d_3 = 3$).

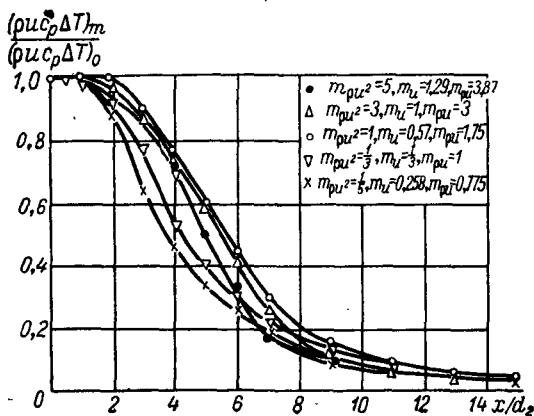
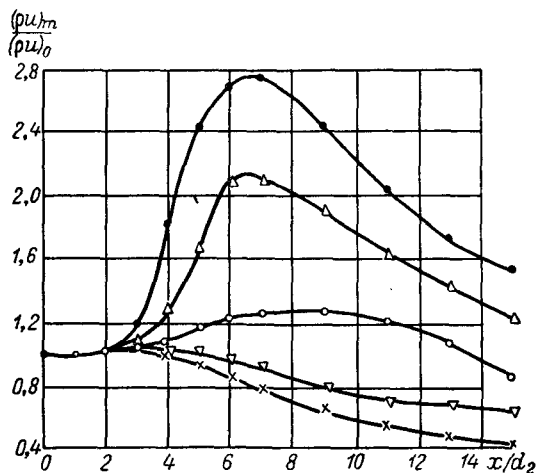
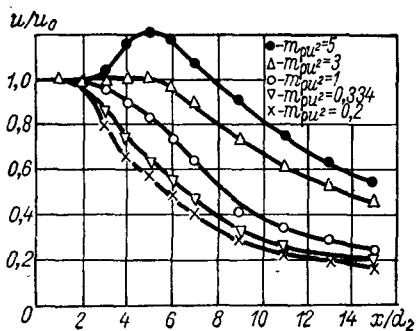


Рис. 4-5. Изменение $(\rho u)_m$ и $(\rho u \Delta T)_m$ по оси коаксиальной струи.

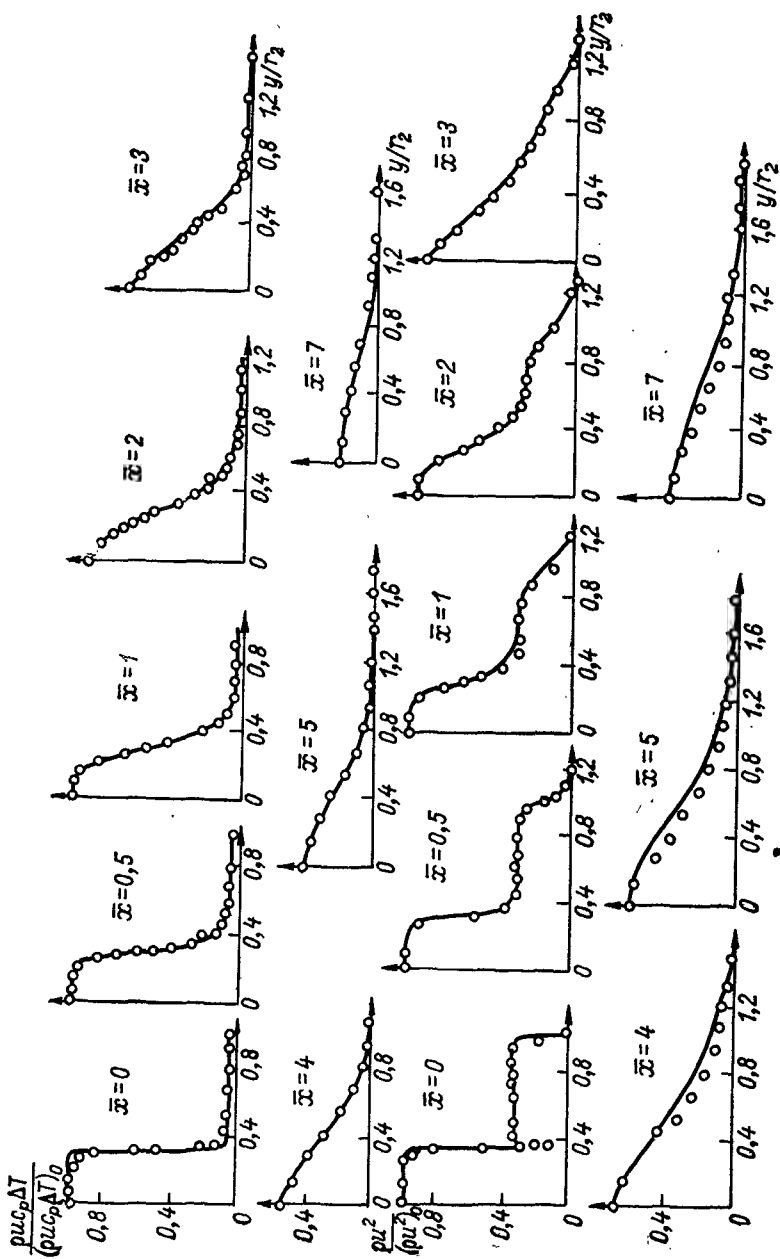


Рис. 4-6. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) данные по изменению $\frac{\rho u c_p \Delta T}{(\rho u c_p \Delta T)_0}$ и ρu^2 в коаксиальной струе ($\omega = 3$).

(и или ρu) на оси струи сохраняет значение, практически равное исходному, дольше всего в том случае, когда соответствующая разность начальных значений скорости $u_1 - u_2$ (или $\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2$) в струе и спутном потоке равна нулю.

На рис. 4-3 нанесены также для сравнения (пунктир) данные, относящиеся к случаю одинаковой плотности газа ($\omega = \rho_2/\rho_1 = 1$). Эти данные, согласующиеся с результатами других авторов [Л. 7; 8], характеризуют отличие в интенсивности смешения изотермических и неизотермических струй. По порядку величины оно невелико и (как у затопленных и спутных струй) может быть объяснено в первую очередь различием в уровне начальной турбулентности. В случае истечения струи при $m_{\rho u^2} > 1$ (см. рис. 4-3), т. е. тогда, когда значение ρu^2 на оси струи меньше, чем на периферии, наличие максимума динамического давления на оси объясняется влиянием внешнего пограничного слоя.

Расчет профилей характерных величин в струе был выполнен по методу эквивалентной задачи теории теплопроводности для заданного начального профиля. Такой расчет дает удовлетворительное совпадение с опытом для случая $m_{\rho u^2} < 1$ (рис. 4-6). В противоположном случае (при $m_{\rho u^2} > 1$) точность совпадения расчетных данных с опытами заметно ухудшается. Это, по-видимому, объясняется тем, что периферийная струя играет роль спутного потока для внутренней струи. Одновременно по наружному периметру внешней струи происходит ее перемешивание с окружающей средой. Тем самым в процессе выравнивания исходного профиля ρu^2 как бы участвуют две различные формы турбулентного смешения, отвечающие развитию затопленной струи и струи в спутном потоке. Это обстоятельство становится существенным для развития факела при сложном начальном профиле и будет рассмотрено в § 4-3.

4-2. О влиянии турбулентного перемешивания на длину факела

По поводу интенсивности турбулентного перемешивания и влияющих на него факторов в литературе нет единого мнения [Л. 1; 2; 16; 54]. Для развития турбулентного факела этот вопрос имеет особенно большое практическое значение. Решение его определяет возможность активного воздействия на факел.

Для турбулентных струй несжимаемой жидкости давно установлено, что перемешивание двух параллельных потоков происходит тем интенсивнее, чем больше различие значений скорости по обе стороны области смешения. Для газовых струй, отличающихся не только скоростью, но и плотностью, только эксперимент может показать, какой из параметров (отношение значений скорости, плотности или величин ρu^2 , ρu и т. д.) является наиболее важным. При этом, говоря об интенсивности перемешивания, следует указать, какая из характеристик сложного явления выбирается в качестве определяющей.

Так как основные характеристики факела (его длина, форма и т. д.) определяются при прочих равных условиях диффузионными потоками реагентов, подходящими к фронту пламени, то естественно, что наиболее показательной в данном случае будет интен-

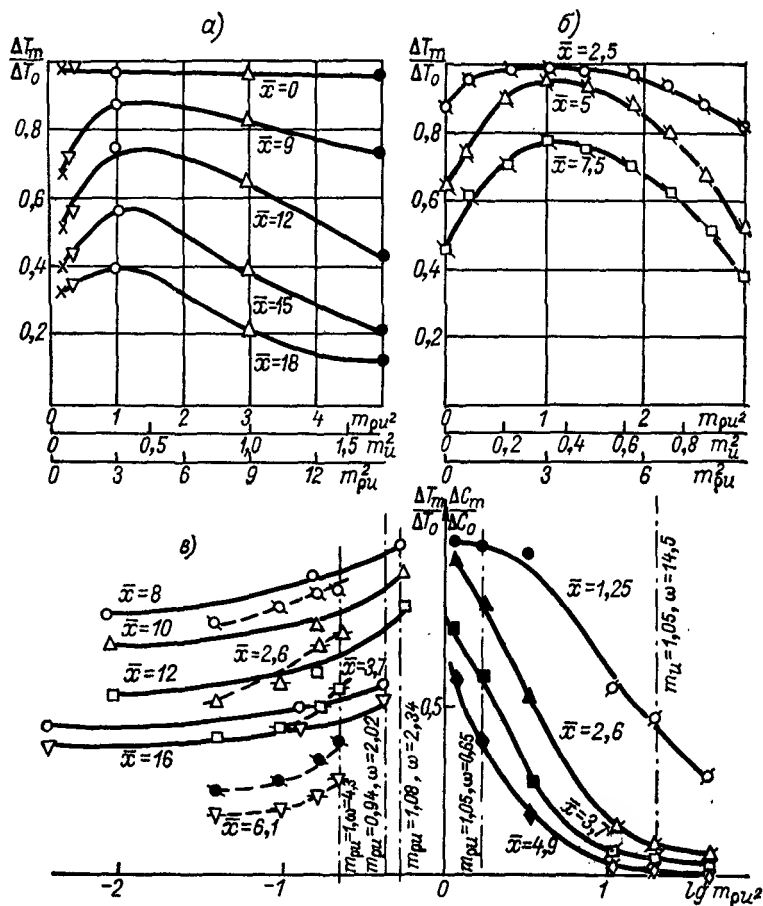


Рис. 4-7. Опытные данные различных исследователей: а — данные по коаксиальной струе ($\bar{x} = x/d_1$); б — данные И. Б. Палатника [Л. 22] ($\bar{x} = x/d_0$); в — данные Пабста [Л. 113], В. Е. Карелина [Л. 23], Л. Альпиньери [Л. 4] ($\bar{x} = x/d_0$).

сивность изменения концентраций топлива и окислителя, а также температуры в зоне смешения. Поэтому в качестве основной величины, характеризующей процессы смешения и горения, следует выбрать концентрацию (температуру). Изучая изменение ее при вариации начальных условий — начальных соотношений скорости; динамического давления и температур, можно выявить условия, при которых происходит минимальное или максимальное переме-

шивание. Данные, приведенные в монографии [Л. 22] и в работах [Л. 4; 113 и др.], свидетельствуют о том, что смешение, определяемое по изменению температуры на оси струи, развивающейся в спутном потоке, происходит наименее интенсивно тогда, когда начальные значения ρu^2 в струе и окружающем потоке совпадают. На рис. 4-7 приведена обработка опытных данных различных исследователей, отчетливо подтверждающая сказанное.

Как видно из графиков, значение $\Delta T_m / \Delta T_0$, а также $\Delta c_m / \Delta c_0$ на некотором расстоянии от среза сопла при $m_{\rho u^2} = 1$ максимально (в пределах изменения параметров, при которых выполнены опыты, использованные для обобщения). В частности, при $m_{\rho u^2} = 1$ значения этих величин заметно больше, чем при $m_{\rho u} = 1$ и, особенно, чем при $m_u = 1$. Иначе говоря, при одинаковых начальных значениях скорости, а также величины ρu в струе и спутном потоке смешение в турбулентных газовых струях не только не ослабляется, как это часто предполагают, но происходит значительно интенсивнее, чем при одинаковых значениях величины ρu^2 .

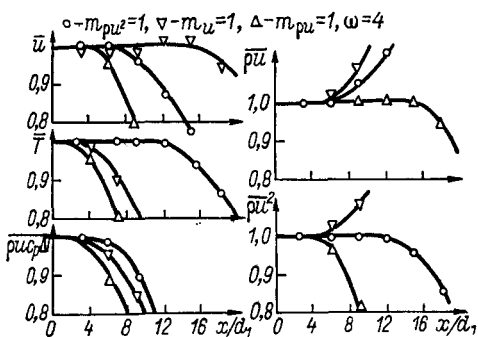


Рис. 4-8. Изменение u , ρu , ρu^2 и ρu^2 по оси коаксиальной струи.

Для большей наглядности на рис. 4-8 приведены результаты специально поставленных опытов [Л. 19], в которых при заданном отношении $\omega = T_1 / T_2$ (например, $\omega = 4$ на рис. 4-8) изучался ход смешения на оси струи при различных условиях истечения. Результаты этих опытов наглядно показывают характер изменения различных основных величин при разных условиях эксперимента.

Опыты проводились на установке с диаметрами сопла: внутренним — 20 мм и наружным — 60 мм. На рисунке показаны кривые изменения скорости и избыточной температуры на оси струи при трех вариантах задания начальных условий: 1) при равных значениях динамического давления ($m_{\rho u^2} = 1$); 2) при равных значениях плотности потока массы ($m_{\rho u} = 1$); 3) при равных значениях скорости ($m_u = 1$).

Как видно из рис. 4-8, значение ρu^2 на оси струи, практически равное начальному $(\rho u^2)_0$, сохраняется дольше всего в первом случае.¹ Значение температуры на оси $\bar{T}$ начинает при $m_{\rho u^2} = 1$

¹ При рассмотрении результатов опытов следует иметь в виду, что, начиная, примерно, с 15-го калибра, дальнейшее затухание струи обусловлено конечными размерами спутного потока, т. е. смешением внешней струи с окружающим воздухом. Поэтому для суждения о ходе перемешивания в спутных струях представляет интерес только область течения до 13—15 калибров.

изменяться заметно дальше от сопла, чем в двух других случаях. Значения u и ρu также сохраняются практически неизменными и равными соответственно u_0 и $\rho_0 u_0$ дольше всего при равенстве соответствующих начальных значений m_u или $m_{\rho u}$ единице.

Таким образом, каждая из характеристик (u , ρu , ρu^2) сохраняется практически неизменной на оси струи и в поперечном сечении потока тогда, когда начальная разность соответствующих значений этой же характеристики равна нулю. Относится ли это только к указанным пределам значений $m_{\rho u^2}$ и ω или может быть распространено на более широкий диапазон изменения этих параметров, в первую очередь отношения плотности и, возможно, степени турбулентности, должен показать специальный эксперимент.

Изменение температуры на оси струи согласно с данными, приведенными на рис. 4-8, происходит весьма интенсивно как при $m_u = 1$, так и при $m_{\rho u} = 1$. Нанесенные на том же графике кривые изменения $\rho \Delta T$ показывают, что интенсивность перемешивания, определенная по этой характеристике, также меньше в случае, когда $m_{\rho u^2} = 1$, чем при $m_u = 1$ или $m_{\rho u} = 1$. Аналогичные данные были получены в опытах и при других значениях отношения плотности ($\omega = 2$ и 3).

Эти данные в целом выявляют интересные закономерности турбулентного смешения в спутных газовых струях. Они подтверждают предположение о том, что в развитии факела существенную роль играет разность начальных значений ρu^2 . О справедливости его свидетельствуют также результаты прямого опыта — определения длины факела в зависимости от параметра $m_{\rho u^2}$ при разных отношениях диаметров внешнего и внутреннего сопел. Опыты проводились при трех значениях этого отношения, соответственно равных 1,35; 2 и 3 (во всех случаях диаметр внутреннего сопла равнялся 20 мм).

Вариация отношения диаметров наряду с изменением параметра $m_{\rho u^2}$ интересна тем, что ей отвечает изменение длины участка, на котором внутренняя часть течения соответствует спутной струе. Иначе говоря, чем больше диаметр внешнего сопла, тем при прочих равных условиях дальше от среза сопла сохраняется вокруг внутренней струи ядро постоянных значений скорости внешней струи.

На фотографиях рис. 4-9 показано изменение внешнего вида факела для различных условий истечения, указанных в подписях к рисункам. На рис. 4-10, 4-11 и 4-12 представлены соответствующие этим опытам кривые изменения температуры на оси струи.

Как фотографии, так и результаты измерения температуры отчетливо свидетельствуют о том, что развитие факела определяется в первую очередь параметром $m_{\rho u^2}$. Длина факела во всех случаях максимальна (наихудшее смешение) при одинаковых значениях

ри². Это хорошо видно также из рис. 4-9, на котором приведена сводная зависимость длины факела (определенной по максимуму температуры) от параметра m_{cu} . По обе стороны максимума длины факела, т. е. в тех областях, где значения m_{cu} и меньше и больше

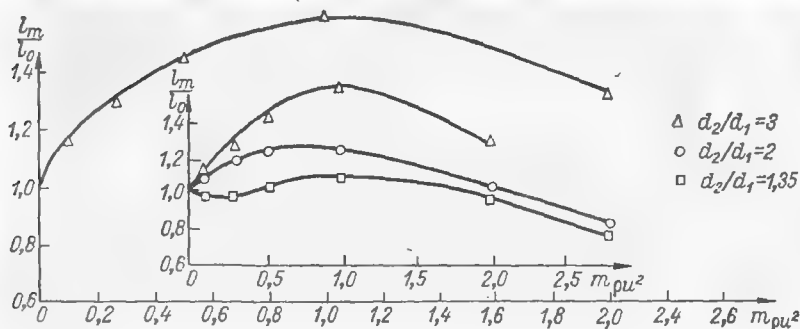
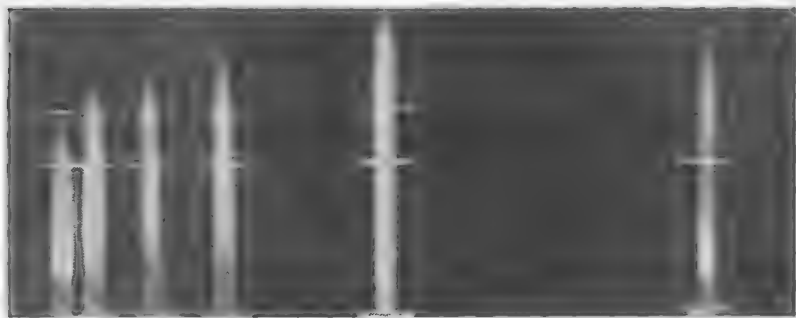


Рис. 4-9. Зависимость длины факела от параметра m_{cu} (l_0 — длина факела при $m_{cu}^2 = 0$; l_m — длина факела при $m_{cu}^2 \neq 0$, фотографии для $d_2/d_1 = 3$)

единицы, длина факела заметно уменьшается (перемешивание происходит более интенсивно) и достигает сравнительно малых значений при $m_{cu} = 1$ или $m_u = 1$.

Аналогичные результаты были получены в последнее время в опытах В. А. Арутюнова и И. Л. Вертлиба. В опытах, проведенных на коаксиальной горелке с другим соотношением размеров сопел, также наблюдался отчетливый экстремум длины диффузионного факела при равенстве единице отношения динамических напоров во внутренней и внешней струях.

Таким образом, в соответствии с приведенными выше результатами опытов по смешению инертных струй, выравнивание поля температуры или концентраций в факеле происходит интенсивно в однородном по скорости (или по значению

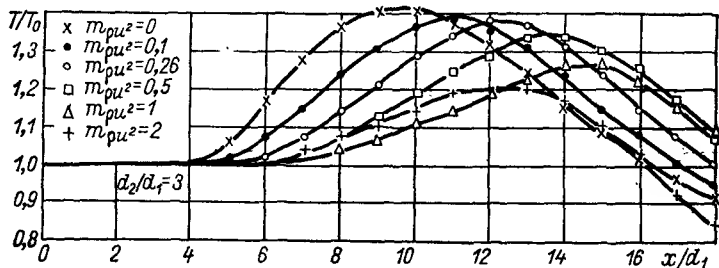


Рис. 4-10. Изменение температуры по оси коаксиального факела ($d_2/d_1 = 3$).

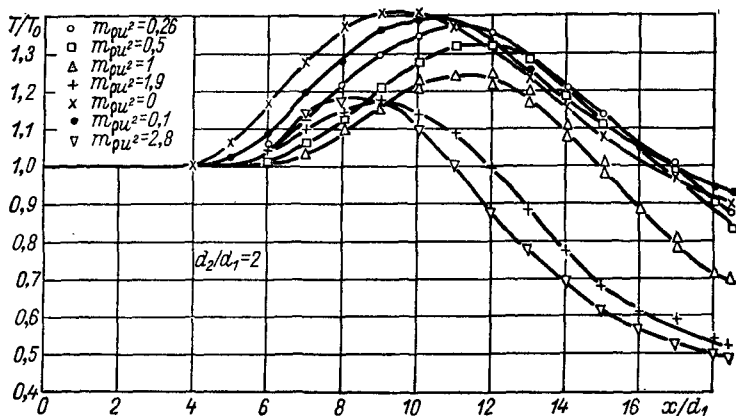


Рис. 4-11. Изменение температуры по оси коаксиального факела ($d_2/d_1 = 2$).

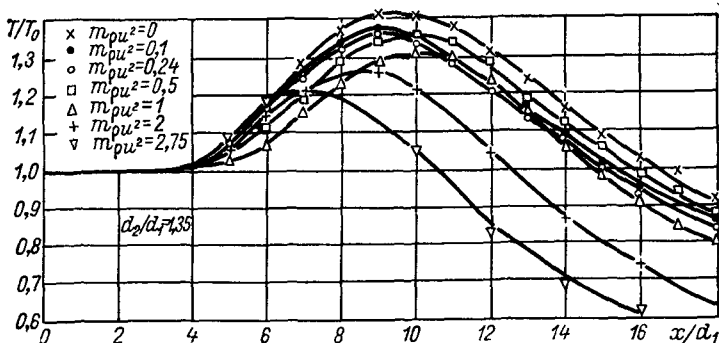


Рис. 4-12. Изменение температуры по оси коаксиального факела ($d_2/d_1 = 1,35$).

pu) потоке, если в нём имеется значительный градиент величины pu^2 .

Экстремальное (наибольшее) значение длины факела при $m_{pu^2} = 1$ наблюдалось при всех значениях отношения диаметров. С увеличением этого отношения, т. е. с приближением к развитию факела в неограниченном спутном потоке, максимум длины факела выражен более четко. В этом случае возрастание длины факела по мере увеличения параметра m_{pu^2} особенно заметно.

Приведенные результаты указывают на практические пути управления прямотруйным факелом. В частности, достижение наибольшей дальности факела связано с выравниванием поля pu^2 , а не скорости (или pu), как это могло показаться на основании опытов со струями несжимаемой жидкости.

Опыты по исследованию струй сжимаемого газа и диффузионного факела показывают также, что встречающееся в зарубежной литературе [Л. 16; 54, 59] утверждение об определяющей роли pu в процессе турбулентного смешения не имеет достаточных оснований.

Обратная задача — создание наиболее короткого и напряженного прямотруйного факела — должна решаться путем обеспечения возможно большей разности pu^2 (при конечном соотношении диаметров).

Разумеется, что приведенные здесь выводы и количественные результаты относятся к конкретным условиям эксперимента. В частности, существенное значение в опытах имело создание практически изобарного потока, отсутствие пересечения струй на выходе из сопла и сведение к минимуму возмущений, вызванных обтеканием струи, разделяющей стенки внутреннего сопла, а также отсутствие сеток или других устройств, снижающих интенсивность пульсаций на выходе.

4-3. Коаксиальный газовый факел

Приведем некоторые экспериментальные данные по аэродинамической структуре коаксиального диффузионного факела [Л. 19]. На рис. 4-13 для трёх значений m_{pu^2} представлены подробные профили основных характерных величин. С качественной стороны такой турбулентный факел близок к рассмотренным ранее затопленному и спутному факелам и занимает в какой-то мере среднее между ними положение. Это особенно наглядно видно на рис. 4-14, на котором показана структура факела для одного значения параметра m_{pu^2} и трех значений отношения диаметров сопел. Приведенные на рис. 4-14 данные получены на описанной в предыдущем параграфе экспериментальной установке.

Основные характеристики выполненных экспериментов указаны в табл. 4-1.

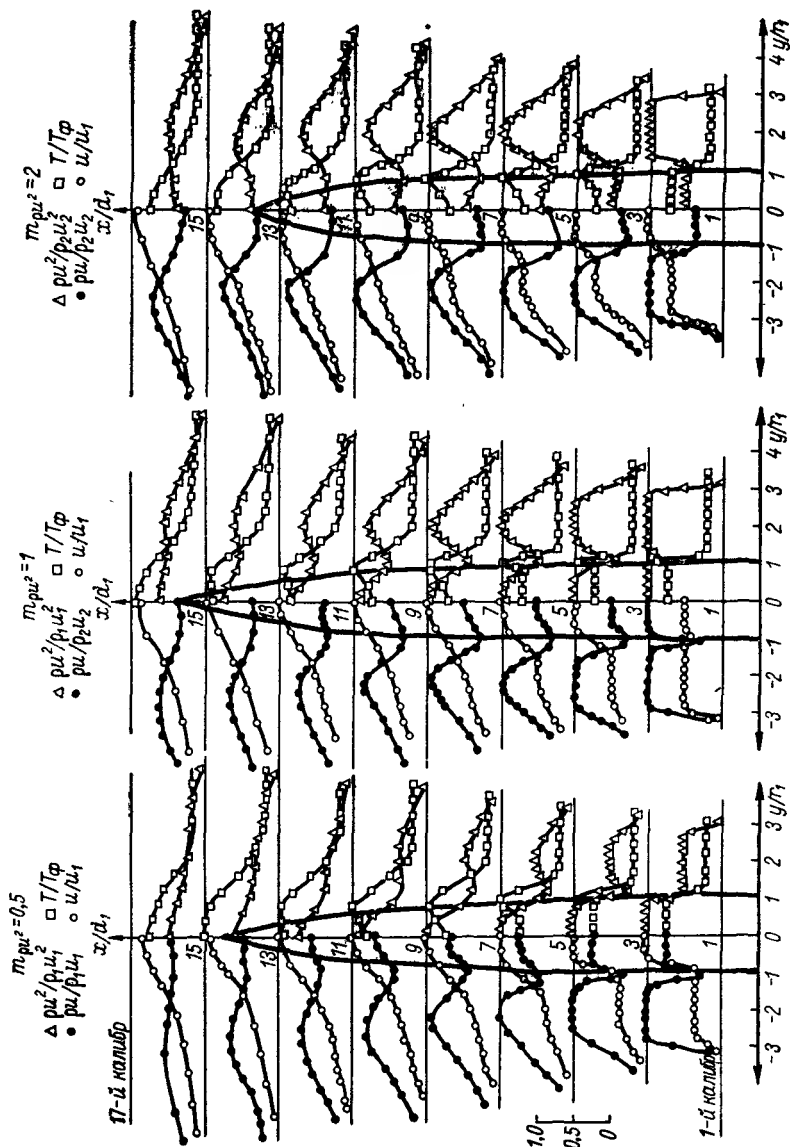


Рис. 4-13. Распределение T , u , ρu и ρu^2 в коаксиальном факеле при $d_2/d_1 = 3$.

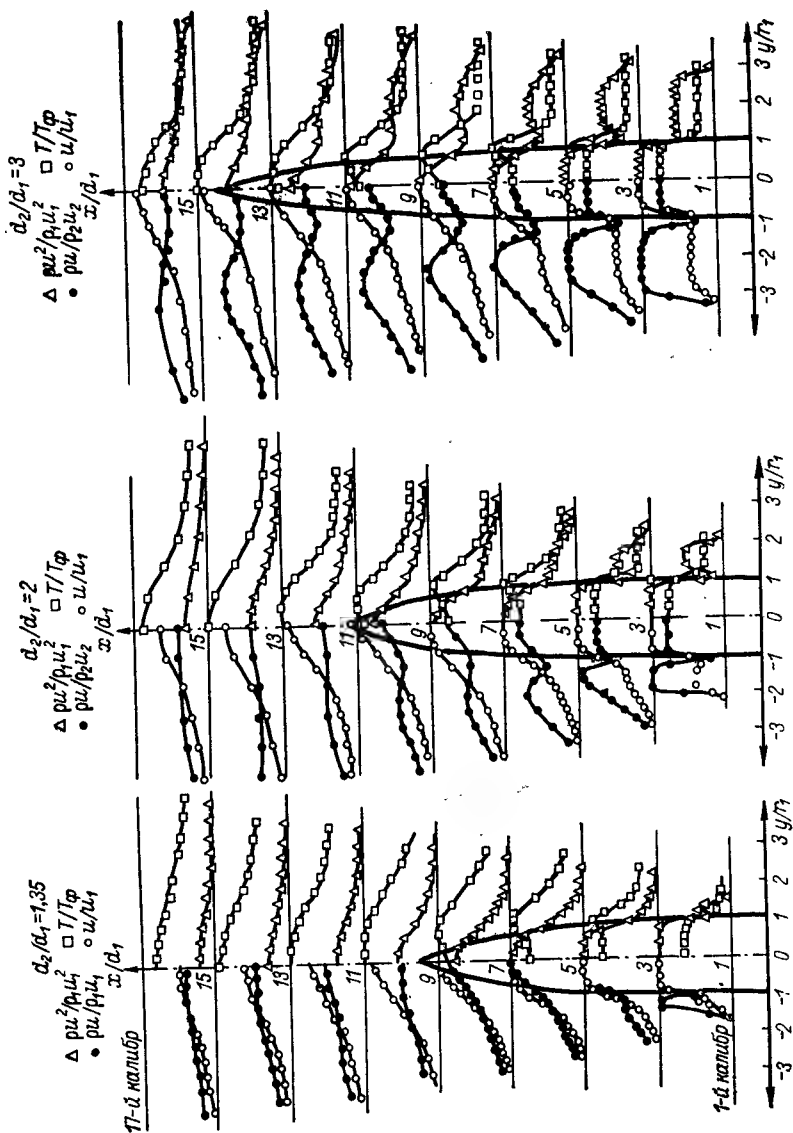


Рис. 4-14. Распределение T , u , ρ и ρu^2 в коаксиальном факеле при $m_{p,a} = 0.5$.

Основные характеристики

Основные характеристики	1,35									
			20		27		40		60	
Диаметр внутреннего сопла, мм										
Диаметр внешнего сопла, мм										
Вид топлива										
Скорость истечения газа из внутреннего сопла, м/сек										
Скорость истечения воздуха из внешнего сопла, м/сек										
Отношение начальных скоростей истечения воздуха и газа										
Температура газа на выходе из внутреннего сопла										
Температура воздуха на выходе из внешнего сопла										
Отношение начальных температур (плотностей) воздуха и газа										
Отношение начальных значений плотности потока массы воздуха и газа										
Отношение начальных значений динамического давления воздуха и газа										
Температура окружающего воздуха, °К										
Максимальная температура факела, °К										

Диаметр внутреннего сопла, мм.

Диаметр внешнего сопла, мм.

Вид топлива.

Скорость истечения газа из внутреннего сопла, м/сек.

Скорость истечения воздуха из внешнего сопла, м/сек.

Отношение начальных скоростей истечения воздуха и газа.

Температура газа на выходе из внутреннего сопла.

Температура воздуха на выходе из внешнего сопла.

Отношение начальных температур (плотностей) воздуха и газа.

Отношение начальных значений плотностей потока массы воздуха и газа.

Отношение начальных значений динамического давления воздуха и газа.

Температура окружающего воздуха, °К.

Максимальная температура факела, °К.

Как уже отмечалось, коаксиальный факел при сравнительно малом размере внешнего сопла представляет собой своеобразный «гибрид» затопленного факела и факела, развивающегося в неограниченном спутном однородном потоке. Это проявляется в том, что на большом расстоянии от среза сопла, после сечения, в котором

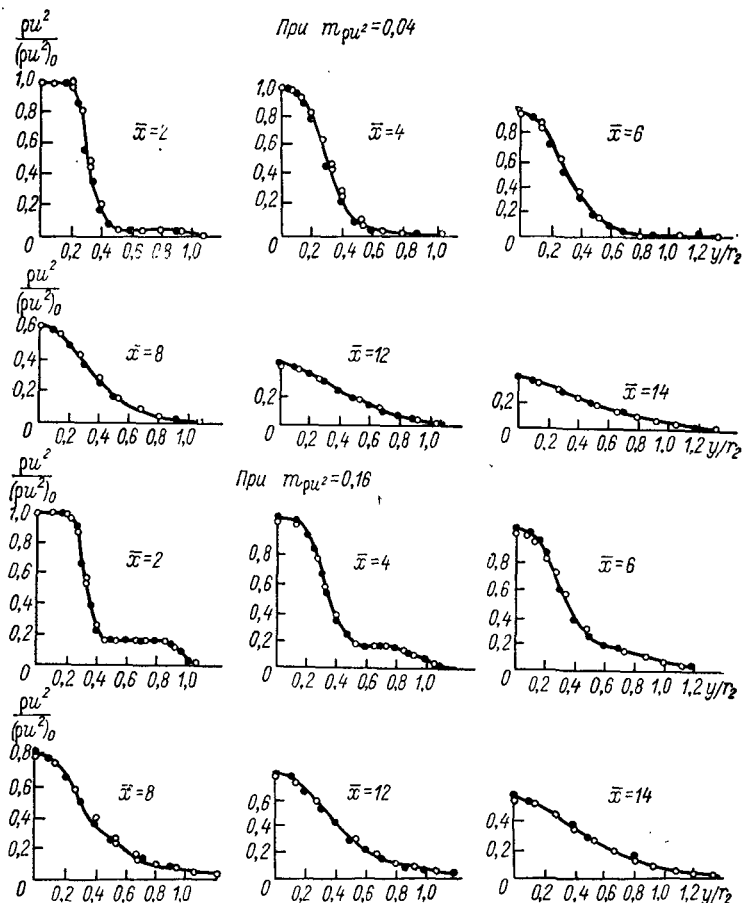


Рис. 4-15. Сопоставление экспериментальных и расчетных данных по распределению ru^2 в коаксиальной струе.

происходит полное смыкание пограничных слоев внешнего потока и струи, факел распространяется в практически неподвижной среде. В отличие от этого в непосредственной близости к соплу фронт пламени устанавливается в зоне смешения двух спутных потоков и на его местоположение влияет соотношение динамических давлений в струе и потоке. Между этими предельными областями горения находится промежуточная область, в которой в той или иной мере

проявляются закономерности, присущие затопленному и спутному факелам.

Построение расчета факела для такого сложного течения представляет значительные трудности, так как требует одновременного

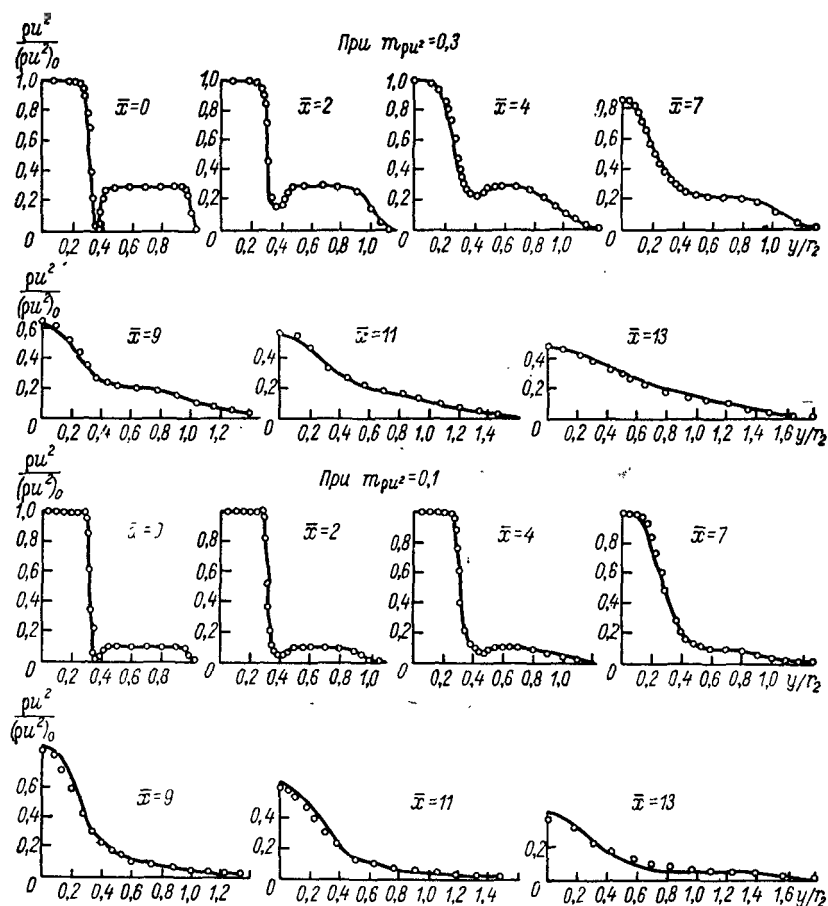


Рис. 4-16. Сопоставление экспериментальных и расчетных данных по распределению $\overline{ru^2}$ в коаксиальном факеле.

учета развития пограничного слоя в затопленном и спутном течениях. Характеристики перемешивания для этих двух случаев существенно различны. Приближенный расчет такого факела можно выполнить путем смыкания решений, полученных для внутреннего и внешнего пограничных слоев (начальный участок — вблизи сопла), с решением для основного участка затопленного факела (за сечением, в котором смыкаются пограничные слои). Такой путь ориен-

тировочного расчета весьма громоздок, как, впрочем, и любой другой чисто конструктивный прием построения сложного течения.

Из-за своеобразной аэродинамической структуры коаксиального факела и наличия в нем, в частности, второго экстремума (провала) на профилях ρu^2 не представляется возможным непосредственное применение для расчета метода эквивалентной задачи теории теплопроводности в том виде, в каком он был использован при расчете затопленного и спутного факелов. Как показывает анализ опытных данных, охватывающий сравнительно широкий диапазон изменения значений начальных параметров, для приближенного расчета может быть использован простейший прием наложения потоков. Сущность его сводится к следующему.

Предполагается, что развитие внутренней струи (в рассматриваемом случае — факела) независимо от размера внешней облегающей струи происходит так, как в спутном безграничном потоке. Внешняя струя распространяется в окружающей среде, как обычная затопленная струя. Вследствие этого по аэродинамической структуре коаксиальный факел представляет собой в первом приближении простое наложение двух независимых течений: спутного факела и затопленной струи. При построении общего течения следует суммировать значения ρu^2 в поле затопленной внешней струи и значения избыточных величин $\Delta \rho u^2$ во внутренней струе (факеле). Аналогичным путем искусственного сложения может быть с известным приближением рассчитано изменение плотности потока энтальпии и вещества, т. е. в конечном счете найдено ориентировочно распределение всех искомых величин — температуры, концентраций, скорости и плотности потока импульса.

На рис. 4-15 и 4-16 в качестве примера приведено сопоставление экспериментальных и расчетных (полученных с помощью наложения двух течений — спутного и затопленного) данных по распределению ρu^2 в поперечных сечениях коаксиальных струй и факела. Как видно из этих графиков, с помощью такого приближенного построения удастся получить удовлетворительное совпадение расчетных и опытных данных. Для практического применения этого приема к расчету коаксиальных струй или факела необходимо иметь обобщенную эмпирическую зависимость $\bar{\xi} = f(\bar{x}, m_{\rho u^2})$, полученную из опытов со спутными и затопленными струями.

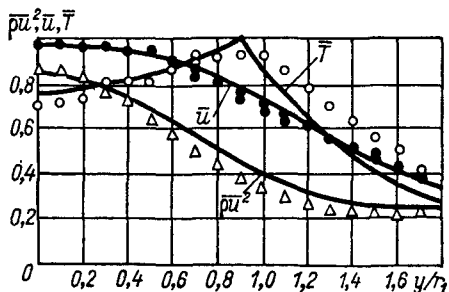


Рис. 4-17. Сопоставление расчета с экспериментальными данными по температуре, скорости и ρu^2 в поперечном сечении коаксиального факела.

На рис. 4-17 показано сопоставление опытных и расчетных данных по распределению величины ρu^2 , температуры и скорости в одном из сечений коаксиального факела. Приведенные данные свидетельствуют о приемлемости такого ориентировочного расчета для практических условий горения прямотруйного турбулентного диффузионного факела.

Рассмотренный в этой главе пример коаксиального факела интересен своей близостью к факелам в реальных технических устройствах (горелках).

ГОРЕНИЕ ПРИ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РЕАКЦИЙ

Глава пятая

ТУРБУЛЕНТНОЕ ГОРЕНИЕ ГАЗА

5-1. Квазигетерогенная схема газового факела

Общим для задач, рассмотренных в первой части книги, было предположение о бесконечно большой скорости реакций горения. Оно позволило исключить из рассмотрения объемные источники тепла и вещества и при введении понятия о фронте пламени построить замкнутую систему газодинамического расчета факела при сжигании предварительно не перемешанных газов. Как будет показано в следующей главе, аналогичная система уравнений для горения однородной смеси с бесконечно большой скоростью реакций оказывается недостаточной для полного расчета. Здесь, однако, рассмотрим другой вопрос, в значительной мере общий для обоих типов факела — неперемешанных газов и однородной смеси. Сущность вопроса сводится к следующему.

При чисто аэродинамическом подходе к горению неперемешанных газов, принятом в предыдущей части, удастся рассчитать местоположение фронта пламени и профили характерных величин — скорости, температуры и концентраций — во всем поле факела. Короче говоря, в предположении о бесконечно большой скорости реакций оказывается возможным определение газодинамической структуры диффузионного факела — ламинарного или турбулентного. Такой результат отвечает исходным посылкам расчета, сводящегося к интегрированию уравнений переноса. Естественно, что при этом из рассмотрения выпадает широкий круг вопросов, связанных с собственно процессом горения. В числе их — расчет полноты сгорания, исследование теплового режима факела, критических условий воспламенения и потухания и др. Практическое значение этих вопросов весьма велико. Включение их в общий план исследования возможно при учете кинетики процесса наряду с газодинамикой (точнее говоря, при свойственном аэродинамической теории факела преобладающем значении газодинамических факторов).

Наиболее последовательной и свободной от дополнительных предположений постановке задачи при учете кинетики реакций отвечает внесение в уравнения переноса тех самых распределенных в объеме факела источников тепла и вещества, исключение которых (для бесконечной скорости реакций) обусловило успех аэродинамической теории диффузионного факела. В математическом плане это привело бы к необходимости интегрировать систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих (в уравнениях диффузии и энергии) члены, отражающие протекание в объеме факела химических реакций.

Эти уравнения в рамках теории свободного ламинарного пограничного слоя для плоского или осесимметричного стационарного течения сжимаемого газа могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[y^{k\mu}(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \\ \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[y^{k\lambda}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + qW(c, T), \\ \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[y^{kD_i}(T) \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] - W(c, T), \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial \rho v y^k}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

где, как и в других случаях, значения $k = 0$ и 1 соответствуют плоскому и осесимметричному течениям. В уравнениях (5-1) дополнительно к предыдущему обозначены: $W(c, T)$ — скорость химической реакции, в первом приближении представленная в виде произведения функции от концентраций реагентов $W_1(c) \approx c^n$ и аррениусовской температурной функции $W_2(T) \approx \exp(-E/RT)$, k — константа, n — суммарный порядок реакции, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, q — тепловой эффект реакции.

Такая упрощенная форма учета кинетики реакций горения отвечает принятой схематизации.

Нелинейность записанной здесь (без деталей) системы уравнений (5-1) обусловлена наличием конвективных членов в уравнении движения, температурной зависимостью констант и дополнительно существенной нелинейностью скорости реакций (закон Аррениуса).

Попытка прямого (численного) интегрирования системы уравнений (5-1) привела бы к весьма сложным и громоздким (даже при расчете на современных быстродействующих ЭВМ) вычислениям. Конечные результаты их были бы к тому же трудно обозримы. Несмотря на это, выполнение таких расчетов на ЭВМ для ламинарного факела представило бы значительный интерес. Сложнее обстоит дело с расчетом турбулентного факела не только из-за неясности с законами турбулентного переноса, но и из-за трудно учитываемого и весьма своеобразного влияния турбулентных пульса-

ций на кинетику реакций. Поэтому целесообразно обратиться к приближенной модели процесса, которая правильно отразила бы основное в физической сущности сложного явления, но позволила бы существенно упростить математическую сторону задачи [Л. 6; 103].

Как показывают численные решения задачи о ламинарном горении в пограничном слое [Л. 82], выполненные с учетом конечной скорости реакции, зона, в которой практически локализуются химические реакции горения, крайне узка. Тем самым (и это отвечает самым общим свойствам сильно экзотермической реакции) оказывается возможным сохранить для расчета с конечной скоростью реакций представление о локализации горения на фронте пламени. Такую схему — горение с конечной скоростью на поверхности фронта пламени — будем называть квазигетерогенной [Л. 6; 27]. Столь необычная, на первый взгляд, постановка задачи о горении с конечной скоростью реакции (для диффузионного или гомогенного факела) нуждается в некоторых пояснениях.

Из опыта и расчетов известно, что при напряженном горении, а только оно интересно для практики, интенсивная химическая реакция протекает в весьма ограниченной области факела — зоне горения. Вне этой зоны во всем поле течения реакция в объеме практически отсутствует. Если по каким-либо причинам заданные параметры процесса (начальная температура газа, скорость истечения, концентрация и др.) изменятся таким образом, что произойдет незначительное снижение максимальной температуры процесса, то это вызовет соответствующее расширение зоны активного реагирования. При этом, разумеется, суммарное количество прореагировавшего вещества уменьшится. Дальнейшее снижение температуры приведет к тому, что скорость реакции в зоне горения, экспоненциально зависящая от температуры, резко уменьшится. Это, в свою очередь, вызовет дальнейшее падение температуры, уменьшение скорости реакции и т. д., вплоть до срыва горения — потухания.

Таким образом, срыв напряженного горения происходит так, что процесс из практически поверхностного (горение на фронте пламени) переходит в объемный (кинетическая область реакций). Этот переход реализуется в весьма узком интервале изменения температуры, так как незначительное изменение последней приводит к существенному снижению скорости реакции. Поэтому зона активного реагирования при снижении температуры вплоть до потухания расширяется весьма незначительно и условно может быть представлена в виде некоторой средней поверхности фронта пламени.

Действительно, кинетическое горение (точнее было бы назвать его окислением — в объеме факела) столь малоинтенсивно, что переход от него к диффузионному горению и обратно практически совпадает с воспламенением и потуханием газового факела. Таким образом, скачкообразный, критический характер этих переходных явлений позволяет вместо задачи о горении в объеме решать

в квазигетерогенном приближении задачу об устойчивости горения газа на поверхности фронта пламени при конечной скорости реакции.

В такой постановке эта задача, как и при бесконечно большой скорости реакции, может быть сведена к интегрированию системы исходных уравнений без распределенных в объеме факела источников тепла и вещества, т. е. к расчету протекания процессов переноса в факеле — своеобразной газовой струе, разделенной поверхностью фронта пламени.

Значения температуры и концентраций реагентов на фронте определяются тепловым режимом горения. Отыскание этих значений из граничных условий на фронте, содержащих выражение скорости реакций, представляет собой вторую задачу, совместную с первой (расчет профилей скорости, температуры и т. п.). Посредством этих граничных условий, по существу уравнений материального и теплового баланса процесса на поверхности фронта, осуществляется связь между представлениями и методами расчета теории теплового режима горения, с одной стороны, и струйной аэродинамикой факела, с другой.

Заметим, что взамен поверхности фронта пламени можно было бы ввести в расчет узкую зону реакции, представив ее в виде области малой, но конечной толщины. В общем виде такая схема обсуждалась в работе Я. Б. Зельдовича [Л. 47]. Применение ее для подобного расчета привело бы к весьма громоздким выкладкам, несмотря на то, что малые размеры зоны позволили бы упростить задачу — линеаризовать ход кривых внутри зоны и т. п. Как следует из численных оценок (например, порядка величины падения температуры при срыве диффузионного горения и др.), а также из отдельных расчетов, конечные результаты мало отличались бы от полученных по более простой и наглядной квазигетерогенной схеме. Вследствие этого и еще потому, что кинетические константы газовых реакций определены недостаточно точно, в последующем изложении принята везде квазигетерогенная схема с локализацией горения на поверхности фронта пламени.

Все это придает расчетам, содержащимся в этой части книги, преимущественно качественный, оценочный характер. Точность их несколько выше для условий, близких к потуханию, и заметно ниже вблизи воспламенения.

5-2. О расчете по методу подобия pu^2

Наряду с методом эквивалентной задачи теории теплопроводности (который будет использован также в следующей главе при анализе теплового режима факела конечного размера) при расчете турбулентного факела находят применение другие методы расчета теории турбулентных струй [Л. 1; 22 и др.]. Особенно это относится к расчету так называемых автомодельных течений — начального и основного участков турбулентной газовой струи и факела. Среди этих методов известными преимуществами в ряде случаев обладает метод подобия pu^2 [Л. 22], позволяющий использовать для расчета течений сжимаемого газа готовый аппарат и конечные формулы теории автомодельных турбулентных струй несжимаемой жидкости.

Поскольку этот метод будет применен в решении автомодельной задачи о плоском турбулентном факеле (см. § 6-1), а также в третьей части книги, напомним вкратце его сущность, заметив при этом, что экспериментальное подтверждение метода было получено в исследованиях турбулентных газовых струй и факела [Л. 22; 41].

Идея метода сводится к предположению о тождественности универсальных профилей относительных значений плотности потоков импульса¹ ρu^2 , избыточной энтальпии $\rho i c_p \Delta T$ и вещества $\rho i \Delta c$ в автомодельных струйных течениях сжимаемого газа и несжимаемой жидкости. Иначе говоря, предпологается, что соотношения:

для основного участка

$$\frac{\rho u^2}{(\rho u^2)_m} = F_1\left(\frac{y}{ax}\right), \quad \frac{(\rho u^2)_m}{(\rho u^2)_0} = f\left(\frac{ax}{d}\right) \text{ и т. д.,}$$

для начального участка струи и факела

$$\frac{\rho u^2}{(\rho u^2)_0} = F_2\left(\frac{y}{ax}\right), \quad \frac{\rho i c_p \Delta T}{(\rho i c_p \Delta T)_0} = \pi\left(\frac{y}{ax}\right) \text{ и т. д.}$$

практически не зависят от значения параметра $\omega = \rho_\infty/\rho_0$ — отношения плотностей газа в окружающей среде и струе. Эмпирическая константа a , как и в струях несжимаемой жидкости, заимствуется из опыта и может, вообще говоря, зависеть от параметра ω .

В расчете по методу ρu^2 вводятся специальные переменные [Л. 22]: $U = \sqrt{\rho} u$, $V = \sqrt{\rho} v$, $\Delta\tau = \sqrt{\rho} \Delta T$, $\Delta c = \sqrt{\rho} \Delta c$. С их помощью исходные уравнения стационарного свободного турбулентного (плоского или осесимметричного) пограничного слоя сжимаемого газа преобразуются в систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial \tau_\tau y^k}{\partial y}, \\ U \frac{\partial \Delta\tau}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta\tau}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial q_\tau y^k}{\partial y}, \\ U \frac{\partial \Delta c}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta c}{\partial y} &= \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial g_\tau y^k}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{y^k} \cdot \frac{\partial V y^k}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

где τ_τ , q_τ , g_τ — соответственно турбулентные касательное напряжение трения и потоки тепла и вещества.

Эта система совпадает по форме с обычной системой для несжимаемой жидкости. Тождественный вид в новых и старых переменных имеют также граничные условия. Заметим, что все это относится к уравнениям для осредненных величин $\bar{U} = U - U'$, $\bar{V} = V - V'$ и т. д. для развитого турбулентного течения, т. е. для условий полного пренебрежения эффектами молекулярной природы. Сохраняется та же, что и для несжимаемой жидкости, форма связи корреляционных моментов с параметрами осредненных величин (теория пути смешения и др.). В результате для переменных U , V и т. д. берутся решения, известные для случая $\rho = \text{const}$ для переменных u , v и т. д. Возврат от решений, записанных для приведенных переменных (U , V и т. д.), к физическим выполняется путем алгебраического пересчета после определения поля плотности. В предельном случае постоянной плотности все расчетные выражения становятся тождественными с теми, которые следуют из решения аналогичной задачи для несжимаемой жидкости [Л. 22].

¹ Для спутных струй $\rho i (u - u_\infty)$.

Как будет показано ниже, сочетание квазигетерогенной схемы и расчета процессов переноса (в частности, по методу pu^2) позволяет рассмотреть тепловой режим автомоделного турбулентного диффузионного факела. Перед этим, а также перед тем, как обобщить данный анализ на неавтомоделный диффузионный факел, остановимся на общих особенностях кинетики реакций в турбулентном потоке.

5-3. О влиянии температурных пульсаций на макрокинетику турбулентного горения

При обсуждении особенностей турбулентного горения газа [Л. 49; 52; 65; 78; 98; 100] на первый план, как правило, выдвигаются вопросы интенсификации процессов переноса (теплопроводности и диффузии) под влиянием турбулентных пульсаций скорости. Обсуждаются, в частности, искривления поверхности фронта пламени вплоть до так называемого эстафетного распространения его путем заброса горящих молей в свежую смесь и т. п.

Наряду с этим важным для выяснения механизма турбулентного горения явлением большое значение имеет влияние пульсаций температуры на макроскопическую кинетику реакций в турбулентном потоке. Указание на несоответствие между наблюдаемой средней скоростью реакции и ее расчетным значением, отнесенным к средней температуре, встречается в работе Я. Б. Зельдовича [Л. 47]. Следуя в основном работе [Л. 26], рассмотрим сущность и в первом приближении количественную сторону этого явления, играющего большую роль в турбулентном горении факела (как и вообще при протекании химических реакций в турбулентном потоке).

Вследствие турбулентного перемешивания свежей смеси с продуктами сгорания в зоне реакции происходят непрерывные пульсации температуры. На рис. 5-1 приведены кривые спектрального распределения интенсивности пульсаций температуры в турбулентном диффузионном факеле [Л. 57]. Как видно из рисунка, частотный спектр пульсаций факела близок к спектру, характерному для турбулентных струй. Из работы [Л. 57] следует, что вблизи фронта пламени (в области максимального значения средней температуры) отношение $T'_{\text{макс}}/T_{\text{макс}}$ достигает 0,5 и выше.

Отвлекаясь от сложного в действительности характера турбулентного спектра пульсаций температуры, рассмотрим для простоты выделенные монохроматические колебания температуры. Примем, что скорость реакции мгновенно следует за изменением температуры, т. е. соответствующее время релаксации пренебрежимо мало. В этом предположении, близком к действительным условиям протекания реакций горения в турбулентном потоке, наиболее часто проявляется своеобразная асимметрия колебаний скорости реакций. Из-за нелинейной экспоненциальной температурной зависимости константы скорости реакции (закон Аррениуса) симметричным относительно среднего значения колебаниям температуры будут отвечать резко несимметричные колебания скорости реакции со значительным (иногда на несколько порядков) сме-

щением в область повышенных значений. Конечно, в реальном турбулентном спектре влияние температурных пульсаций на кинетику реакций будет чрезвычайно сложным, однако качественная сторона нелинейного эффекта сохранится — рост скорости реакции при повышении температуры будет превалировать над падением ее при снижении температуры.

Заметим, что подобный эффект сохраняется и в других процессах, скорость которых нелинейно зависит от температуры (например, при излучении). В частности, и это наблюдается в эксперименте (см. § 10-2), аналогичное значительное увеличение эффективного значения электропроводности имеет место в турбулентных потоках проводящего газа из-за нелинейной зависимости проводимости от температуры

$$\left[\sigma \sim \exp \left(-\frac{A}{T} \right) \right].$$

В принципе сложный временной ход скорости реакции учитывается при статистическом описании турбулентного горения [Л. 52; 65; 66; 77; 100], но такой путь не привел пока к конкретным результатам. Поэтому для оценки рассматриваемого эффекта обратимся к простейшим колебаниям.

С этой целью свяжем между собой актуальное, а затем и среднее значение скорости реакции в турбулентном потоке со значением ее, рассчитанным по осредненной (в смысле Рейнольдса) температуре. Поскольку экспоненциальная зависимость скорости реакции от температуры преобладает над сравнительно слабой степенной зависимостью от концентрации (также

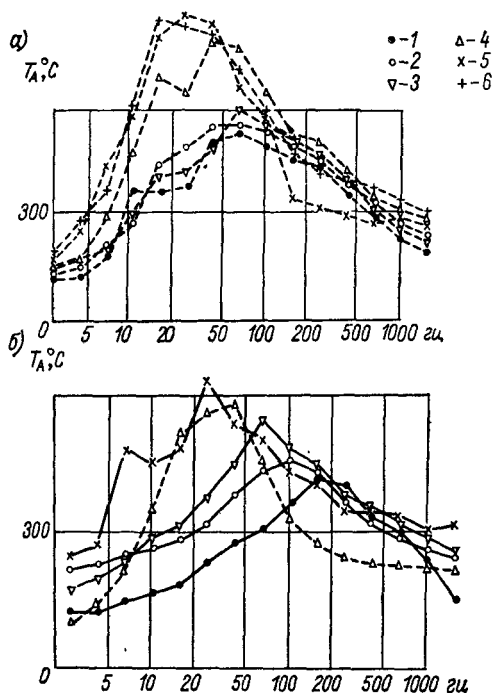


Рис. 5-1. Кривые спектрального распределения интенсивности турбулентных пульсаций температуры в диффузионном факеле: а — при $x = 4$

1 — при $y = 0$, $\bar{T} = 990^\circ \text{C}$; 2 — при $y = 5$ мм, $\bar{T} = 1010^\circ \text{C}$; 3 — при $y = 10$ мм, $\bar{T} = 1200^\circ \text{C}$; 4 — при $y = 15$ мм, $\bar{T} = 1340^\circ \text{C}$; 5 — при $y = 20$ мм, $\bar{T} = 1090^\circ \text{C}$; 6 — при $y = 25$ мм, $\bar{T} = 550^\circ \text{C}$;

б — при $x = 8$

1 — при $y = 0$, $\bar{T} = 980^\circ \text{C}$; 2 — при $y = 5$ мм, $\bar{T} = 1140^\circ \text{C}$; 3 — при $y = 10$ мм, $\bar{T} = 1390^\circ \text{C}$; 4 — при $y = 15$ мм, $\bar{T} = 730^\circ \text{C}$; 5 — при $y = 20$ мм, $\bar{T} = 160^\circ \text{C}$.

пульсирующей во времени в результате турбулентного перемешивания), ограничимся учетом изменения константы скорости реакции. Температурную зависимость последней представим, как обычно, формулой закона Аррениуса:

$$k(T) = k_0 \exp \left[-\frac{E}{RT(t)} \right]. \quad (5-3)$$

Формула (5-3) определяет изменение во времени мгновенного значения константы скорости реакции. Среднее ее значение для установившегося (в среднем) процесса может быть выражено в виде

$$\overline{k(T)} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \exp \left[-\frac{E}{RT(t)} \right] dt.$$

где τ — достаточно большой (по сравнению с периодом пульсаций температуры) интервал времени. Определим также среднее значение температуры ($\bar{T} = T - T'$):

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} T(t) dt$$

и соответствующее ему значение константы скорости реакции:

$$k(\bar{T}) = k_0 \exp \left[-\frac{E}{R \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} T(t) dt} \right] = k_0 \exp \left(-\frac{E}{R\bar{T}} \right). \quad (5-4)$$

Обозначим отношение осредненного во времени значения константы скорости реакции $\overline{k(T(t))}$ к значению ее, соответствующему средней температуре $k[\bar{T}(t)]$, символом χ :

$$\chi = \frac{\overline{k(T)}}{k(\bar{T})}. \quad (5-5)$$

Для качественной оценки допустим, что актуальное значение температуры $T(t)$ изменяется со временем по одной из простейших симметричных форм колебаний, например прямоугольной (рис. 5-2). Тогда — и в этом основное содержание эффекта — нелинейный характер зависимости $k(T)$ приведет к асимметричному колебанию $k(t)$ с существенным преобладанием повышенного относительно $k(\bar{T})$ значения над пониженным. То же самое сохранится и при синусоидальных колебаниях. С физической стороны эта асимметрия колебаний значения $k(T)$ относительно величины $k(\bar{T})$ (или значения χ относительно единицы) объясняется тем, что повышение температуры на величину $T' = T - \bar{T}$ вызывает относительное увеличение значения константы k по формуле (5-4), существенно превышающее уменьшение ее при снижении температуры на ту же величину T' . Иными словами, для трех значений

температуры $\bar{T} + T'$, $\bar{T}$ и $\bar{T} - T'$ можно написать неравенство $\frac{k(\bar{T} + T')}{k(\bar{T})} - 1 > 1 - \frac{k(\bar{T} - T')}{k(\bar{T})}$, справедливое для практически интересной области аррениусовской кривой (до перегиба).

Приведем теперь количественную оценку эффекта. Ограничиваясь для простоты случаем прямоугольного симметричного во времени колебания температуры с амплитудой T' , запишем среднее значение $\bar{k}(\bar{T})$ в виде

$$\bar{k}(\bar{T}) = \frac{k(\bar{T} + T') + k(\bar{T} - T')}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[-\frac{E}{R\bar{T}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{T'}{\bar{T}}\right)} \right] + \exp \left[-\frac{E}{R\bar{T}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{T'}{\bar{T}}\right)} \right] \right\}.$$

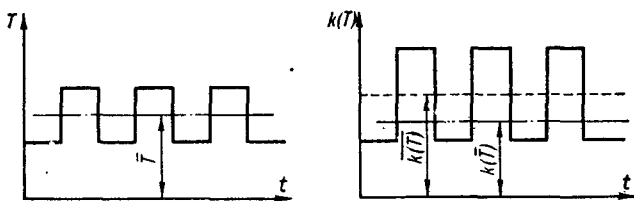


Рис. 5-2. Схема колебаний температуры и константы скорости реакции.

Примем, что пульсации температуры сравнительно малы: $T'/\bar{T} \ll 1$; тогда вместо (5-5), используя приближенное разложение в показателе экспоненты $\frac{1}{1 \pm \frac{T'}{\bar{T}}} \approx 1 \mp \frac{T'}{\bar{T}}$, можно написать

$$\kappa \approx \frac{\exp \left[-\frac{E}{R\bar{T}} \left(1 - \frac{T'}{\bar{T}} \right) \right] + \exp \left[-\frac{E}{R\bar{T}} \left(1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right) \right]}{2 \exp \left(-\frac{E}{R\bar{T}} \right)} = \text{ch} \left(\frac{ET'}{R\bar{T}^2} \right). \quad (5-6)$$

В этом приближении вместо общей зависимости вида $\kappa = \kappa \left(\frac{R\bar{T}}{E}, \frac{T'}{\bar{T}} \right)$ приходим к простой приближенной формуле с единым аргументом $\vartheta = ET'/R\bar{T}^2$ для определения κ :

$$\kappa = \text{ch } \vartheta.$$

Очевидно, что отношение $\bar{k}(\bar{T})$ к $k(\bar{T})$, т. е. значение κ , будет тем больше, чем больше относительная величина колебаний

температуры $\bar{T}'/\bar{T}$ и чем меньше средняя величина безразмерной температуры $R\bar{T}/E$.

Рассмотрим численный пример для значения $T'/\bar{T} = 0,1$. Для нескольких значений $R\bar{T}/E$, указанных в таблице, соответственно получим:

$R\bar{T}/E$	0,03	0,05	0,1	0,2	ϑ	3,33	2	1	0,5
$\bar{T}$, °K	300	500	1000	2000	κ	14	3,6	1,54	1,13

Как видно из этих данных, при вполне реальных значениях $\bar{T}$ (при $E = 20\,000$ ккал/моль·град) и умеренной величине $T'/\bar{T}$ значения отношения κ весьма большие. Порядок величины κ остается тем же, если взять для расчета, например, треугольную или наиболее правдоподобную с физической точки зрения синусоидальную форму колебаний. В этом случае приближенно можно положить $\kappa = \varphi \operatorname{ch} \vartheta$, где φ — формфактор колебаний, равный примерно $\varphi = 1$, $\varphi = 0,7$ и $\varphi = 0,5$ соответственно для прямоугольной, синусоидальной и треугольной форм колебаний.

Для приведенного выше примера $T'/\bar{T} = 0,1$ и $\varphi \approx 0,7$ (колебание близко к синусоидальному) взамен $\kappa = 3,6$ (при $\varphi = 1$) будем иметь $\kappa \approx 2,2$. В случае сильных пульсаций температуры ($T'/\bar{T} \approx 1$) в качестве верхней предельной оценки из формулы (5-6) получим (при $\varphi = 1$, $\bar{T} \approx T'$)

$$\kappa = 0,5 \exp\left(\frac{E}{2R\bar{T}}\right).$$

При $R\bar{T}/E = 0,05$ и $0,1$ значения κ соответственно будут равны $\kappa \approx 10^4$ и $\kappa \approx 75$. Даже при $R\bar{T}/E = 0,2$ значение $\kappa = 6$.

Приведенный приближенный расчет и численные примеры дают достаточно наглядное представление о порядке величины рассматриваемого эффекта. Обратимся поэтому к краткому обсуждению физических условий, в которых он может проявляться.

Во всех случаях, когда в зоне протекания химической реакции из-за турбулентного смешения будут происходить пульсации температуры, локальное повышение скорости реакции при $\delta T' > 0$ в среднем будет всегда значительно превышать ее снижение при $\delta T' < 0$. Результатом этого будет более быстрое по сравнению с ламинарным потоком распространение пламени. При этом, как и всегда, когда речь идет о смешении свежей горючей смеси с продуктами сгорания, местное повышение температуры будет сопровождаться местным балластированием смеси (снижением действующих концентраций). Однако преобладание более резкой (экспоненциальной) зависимости скорости реакции от температуры над более слабой (степенной) зависимостью от концентрации, как

и в других случаях (возврат продуктов горения при стабилизации пламени и др.), обеспечивает прогрессивное, ускоряющее реакцию действие этого смещения.

Таким образом, обсуждаемый эффект играет, видимо, существенную роль в явлении турбулентного распространения пламени, обуславливая, в частности, известную из опытов зависимость скорости турбулентного распространения пламени от кинетических факторов (от нормальной скорости пламени и др.— см. [Л. 50; 100]). Особенно велико может быть ускоряющее действие пульсаций температуры при распространении пламени в неподвижной газовой смеси и при возникновении в последней турбулентного движения, приводящего к перемешиванию продуктов сгорания со свежей смесью и, следовательно, к пульсациям температуры, сопровождающим пульсации скорости. Представляется вероятным, что именно этим частично объясняется механизм ускорения пламени в трубах, приводящего к образованию детонационной волны, а также влияние шероховатости и других факторов на возникновение детонации в опытах К. И. Щелкина [Л. 98; 99]. Не рассматривая здесь эти вопросы, сформулируем общий физический вывод, имеющий принципиальное значение.

В турбулентном потоке, помимо известных кинематических факторов, в зоне горения проявляется прямое, в качественном отношении значительное воздействие турбулентных пульсаций температуры на эффективную скорость протекания химических реакций.

Глава шестая

ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ДИФфуЗИОННОГО ФАКЕЛА

6-1. Плоский фронт пламени

Рассмотрим условия, при которых возможно стационарное горение на фронте пламени в плоскопараллельном свободном пограничном слое при смешении турбулентной газовой струи (топлива) с неподвижным воздухом (окислителем). Схема факела представлена на рис. 6-1. В соответствии с квазигетерогенной схемой явления примем, что на поверхности бесконечно тонкого фронта пламени протекает химическая реакция с конечной скоростью. Будем считать также, что поверхность горения наклонена под малым углом к оси x , что характерно для горения газа в струйном пограничном слое.

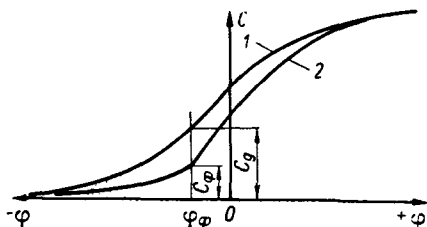


Рис. 6-1. Схема распределения концентрации топлива в факеле.

1 — без горения; 2 — при горении с конечной скоростью реакций.

Для решения используем наиболее простой метод расчета автомодельных неизотермических турбулентных струй по схеме подобия ρu^2 [Л. 22]. Уравнения стационарного плоского свободного турбулентного пограничного слоя, записанные в переменных U , V и т. д., принятых в методе подобия ρu^2 (см. § 5-2), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_\tau \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ U \frac{\partial \Delta \tau}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta \tau}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a_\tau \frac{\partial \Delta \tau}{\partial y} \right), \\ U \frac{\partial \Delta c}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta c}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\tau \frac{\partial \Delta c}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

Эту систему следует интегрировать при следующих граничных условиях:

на внешних границах факела

$$\left. \begin{aligned} U &= U_{+\infty}, \quad \Delta \tau = \Delta \tau_{+\infty}, \quad \Delta c_a = \Delta c_{a,+\infty} \quad \text{при } y = +\infty, \\ U &= 0, \quad \Delta \tau = \Delta \tau_{-\infty}, \quad \Delta c_b = \Delta c_{b,-\infty} \quad \text{при } y = -\infty; \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

на фронте пламени при $y = y_\phi$

$$\left. \begin{aligned} \Delta c_{a,b} &= 0, \quad \Delta \tau = 0; \\ \rho_\phi D_\phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_1 - \rho_\phi D_\phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_2 &= k_0 W(c) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \\ q \left[\rho_\phi D_\phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_1 - \rho_\phi D_\phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_2 \right] &= \lambda_\phi \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_1 + \lambda_\phi \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_2; \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

Как и в задачах в первой части книги,

$$-\frac{\rho_\phi D_{\phi b} \left(\frac{\partial c_b}{\partial y} \right)_\phi}{\rho_\phi D_{\phi a} \left(\frac{\partial c_a}{\partial y} \right)_\phi} = \Omega. \quad (6-4)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau_{+\infty}} &= \frac{T - T_\phi}{T_{+\infty} - T_\phi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{+\infty}}}, & \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau_{-\infty}} &= \frac{T - T_\phi}{T_{-\infty} - T_\phi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{-\infty}}}, \\ \frac{\Delta c_a}{\Delta c_{a,+\infty}} &= \left(\frac{c - c_\phi}{c_{+\infty} - c_\phi} \right)_a \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{+\infty}}}, & \frac{\Delta c_b}{\Delta c_{b,-\infty}} &= \left(\frac{c - c_\phi}{c_{-\infty} - c_\phi} \right)_b \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{-\infty}}}; \end{aligned}$$

индекс 1 относится к потоку, подходящему к фронту пламени, индекс 2 — к потоку, отходящему от фронта.

Граничные условия (6-3) представляют собой запись уравнений материального и теплового баланса для поверхности фронта пла-

мени. В левой части первого из них по разности диффундирующих к фронту и от него потоков реагента определяется количество сгорающего газа, равное скорости реакции (правая часть уравнения). В левой части второго уравнения содержится та же величина, что и в левой части первого, пересчитанная на количество выделяющегося тепла; справа записано суммарное количество тепла, отводимое от фронта по обе его стороны. Уравнение (6-4), как и в расчете факела с бесконечной скоростью реакции, связывает потоки реагентов и служит для определения местоположения фронта пламени.

Заметим, что конвективные члены не вошли в уравнения (6-3), поскольку фронт пламени является поверхностью слабого разрыва. Действительно, в левые части уравнений (6-3), казалось бы, следует ввести дополнительно к переносу диффузией еще и разность конвективных потоков по обе стороны фронта:

$$\Delta \rho u c = (\rho u c)_1 - (\rho u c)_2, \quad \Delta \rho u c_p T = (\rho u c_p T)_1 - (\rho u c_p T)_2.$$

Однако вследствие непрерывности значений ρ , u , T , c на поверхности фронта разности $\Delta \rho u c$ и $\Delta \rho u c_p T$ при $y = y_{\text{ф}}$ тождественно равны нулю. В условие (6-4) также не входят конвективные потоки, так как при конечной скорости реакций не только потоки реагентов, но и сами концентрации на фронте пламени находятся в стехиометрическом соотношении $c_{\text{бф}} = \Omega c_{\text{аф}}$ и, следовательно, $\rho u c_{\text{бф}} = \rho u c_{\text{аф}} \Omega$.

Строго говоря, соотношения (6-3) и (6-4) должны быть записаны для потоков, подходящих к фронту по нормали. Однако, поскольку фронт наклонен под малым углом к оси Ox , можно, как и в других случаях, приближенно заменить производные по нормали к фронту производными по координате y .

Будем искать автомодельное решение системы уравнений (6-1), полагая, что переменные U , $\Delta \tau$, Δc являются универсальными функциями обобщенной координаты:

$$\frac{U}{U_{+\infty}} = F'(\varphi), \quad \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau_{+\infty}} = \Theta_I(\varphi), \quad \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau_{-\infty}} = \Theta_{II}(\varphi),$$

$$\frac{\Delta c_a}{\Delta c_{a, +\infty}} = \pi_I(\varphi), \quad \frac{\Delta c_b}{\Delta c_{b, -\infty}} = \pi_{II}(\varphi).$$

Примем также, что $v_T = k U_{+\infty} x$, $a_T = k_T U_{+\infty} x$, $D_T = k_d U_{+\infty} x$, а также $\sigma_T = v_T/a_T = k/k_T$, $\sigma_{T, д} = v_T/D_T$, причем $v_T < a_T = D_T$. При таких допущениях задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной системе уравнений (1-10) в задаче о ламинарном диффузионном факеле (см. § 1-2),

$$\left. \begin{aligned} F'''(\varphi) + 2F(\varphi)F''(\varphi) &= 0, \\ \Theta''(\varphi) + 2\sigma_T F(\varphi)\Theta'(\varphi) &= 0, \\ \pi''(\varphi) + 2\sigma_{T, д} F(\varphi)\pi'(\varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

со следующими граничными условиями:

на внешних границах

$$F'(\varphi) = 1, \quad \Theta_I(\varphi) = 1, \quad \pi_I(\varphi) = 1 \quad \text{при } \varphi = +\infty,$$

$$F'(\varphi) = 0, \quad \Theta_{II}(\varphi) = 1, \quad \pi_{II}(\varphi) = 1 \quad \text{при } \varphi = -\infty;$$

на фронте пламени

$$\Theta_I(\varphi) = 0, \quad \Theta_{II}(\varphi) = 0, \quad \pi_I(\varphi) = 0, \quad \pi_{II}(\varphi) = 0,$$

$$\rho_\Phi D_\Phi \left[\left| \frac{\partial c_a}{\partial \varphi} \right|_1 - \left| \frac{\partial c_a}{\partial \varphi} \right|_2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} = k_0 W(c) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (6-6)$$

$$\rho_\Phi D_\Phi \left[\left| \frac{\partial c_a}{\partial \varphi} \right|_1 - \left| \frac{\partial c_a}{\partial \varphi} \right|_2 \right]_\Phi = \lambda \left[\left| \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_1 - \left| \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_2 \right]_\Phi, \quad (6-7)$$

$$-\frac{\rho_\Phi D_{\Phi\delta} \left(\frac{\partial c_\delta}{\partial \varphi} \right)_\Phi}{\rho_\Phi D_{\Phi a} \left(\frac{\partial c_a}{\partial \varphi} \right)_\Phi} = \Omega. \quad (6-8)$$

Граничные условия для функций F , Θ и π позволяют найти распределение величин ρu^2 , $\Delta\tau$, Δc в поперечных сечениях пограничного слоя. Вопрос об абсолютных значениях температуры и концентрации на фронте пламени и, следовательно, о принципиальной возможности горения остается при этом открытым. Эти значения находятся из условий (6-6) — (6-8), определяющих квазистационарный тепловой режим фронта пламени.

Приближенное решение системы (6-5) при указанных граничных условиях (как и в § 1-2) следующее:

для всей области течения ($-\infty \leq \varphi \leq +\infty$)

$$\frac{U}{U_{+\infty}} = F'(\varphi) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi})]; \quad (6-9)$$

для области изменения φ от φ_Φ до $+\infty$

$$\Theta_I(\varphi) = \pi_I(\varphi) = 1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\Phi \sqrt{\sigma_T})}; \quad (6-10)$$

для области изменения φ от φ_Φ до $-\infty$ ($\bar{\varphi} = \varphi + 0,33$)

$$\Theta_{II}(\varphi) = \pi_{II}(\varphi) = 1 - \frac{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\Phi \sqrt{\sigma_T})}. \quad (6-11)$$

Из этих соотношений нетрудно определить профили температуры и концентрации в поперечных сечениях пограничного слоя.

Выражения, описывающие распределение температуры и концентрации, имеют вид:¹

¹ Как и в § 2-1, принято $\sigma_{T, д} = \sigma_T$.

для области изменения φ от φ_ϕ до $+\infty$

$$\left(\frac{c - c_\phi}{c_{+\infty} - c_\phi}\right)_a = \left[1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})}\right] \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}}, \quad (6-12)$$

$$\left(\frac{c - c_{+\infty}}{c_\phi - c_{+\infty}}\right)_\phi = 1 - \left[1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})}\right] \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}}, \quad (6-13)$$

$$\frac{T - T_{+\infty}}{T_\phi - T_{+\infty}} = 1 - \left[1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})}\right] \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}}; \quad (6-14)$$

для области изменения φ от φ_ϕ до $-\infty$

$$\left(\frac{c - c_{-\infty}}{c_\phi - c_{-\infty}}\right)_a = 1 - \left[1 - \frac{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})}\right] \sqrt{\frac{\rho_{-\infty}}{\rho}}, \quad (6-15)$$

$$\left(\frac{c - c_\phi}{c_{-\infty} - c_\phi}\right)_\phi = \left[1 - \frac{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})}\right] \sqrt{\frac{\rho_{-\infty}}{\rho}}, \quad (6-16)$$

$$\frac{T - T_{-\infty}}{T_\phi - T_{-\infty}} = 1 - \left[1 - \frac{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})}{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})}\right] \sqrt{\frac{\rho_{-\infty}}{\rho}}. \quad (6-17)$$

Аналогично из (6-9) определяется профиль скорости:

$$\frac{u}{u_{+\infty}} = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi})] \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}}.$$

Из выражений (6-12) и (6-13) или (6-15) и (6-16) и соотношения (6-4) определим зависимость координаты фронта пламени от заданных параметров процесса:

$$\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T}) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad (6-18)$$

где

$$\beta = \Omega \frac{c_{a, +\infty}}{c_{a, -\infty}}.$$

Найдем из выражений (6-12) — (6-16) производные $|\partial c_a / \partial \varphi|_1$ и $|\partial c_\phi / \partial \varphi|_2$ и подставим их значения в уравнение (6-6). В результате получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho_\phi}} \rho_\phi D_\phi \frac{[\operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_T})]_\phi'}{1 - [\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})]^2} \{c_{+\infty} [1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_T})] - 2c_\phi\} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \\ = k_0 W(c) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \end{aligned} \quad (6-19)$$

При выводе соотношения (6-19) принято для простоты $T_{-\infty} = T_{+\infty}$. В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать

также $W(c) = \rho c$, что формально отвечает реакции первого порядка. Хотя это допущение не соответствует действительному характеру процесса, оно отражает основное свойство простых реакций — убывание скорости реагирования по мере выгорания исходного продукта. Укажем в связи с этим, что расчет для реакции второго порядка (см. ниже) не приводит к качественно новым результатам.

За основную характеристику процесса примем коэффициент полноты сгорания, под которым будем подразумевать отношение локальной концентрации топлива на фронте пламени к концентрации этого же компонента в той же точке при отсутствии реакции (см. рис. 6-1):

$$\psi = 1 - \frac{c_{\phi}}{c_g},$$

где c_g — такая концентрация топлива, которая получилась бы при турбулентном смешении газов без горения при численном значении приведенной координаты $\varphi = \varphi_{\phi}$. Такая характеристика отвечает физической сущности процесса выгорания газов на фронте пламени при конечной скорости реакций. При отсутствии горения (турбулентное перемешивание струй) $\psi = 0$, при полном сгорании $\psi = 1$ (бесконечная скорость реакции).

Решим уравнение (6-19) относительно полноты сгорания с учетом соотношения $2c_g = c_{+\infty} [1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T})]$:

$$\psi_1 = \frac{1}{1 + \frac{2D}{k_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{[\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T})]_{\phi}}{1 - [\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T})]^2} \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho_{\phi}} \exp\left(\frac{E}{RT}\right)}}. \quad (6-20)$$

Уравнение (6-20) с учетом равенств $D = k_d U_{+\infty} x$, $\partial \bar{\varphi} / \partial y = 1/ax$, а также обозначений

$$\frac{1}{k_0} = \tau_k, \quad \frac{1 - [\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T})]^2}{\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T})_{\phi}} \cdot \frac{a}{2k_d U_{+\infty}} = \tau_d, \quad \frac{\tau_d}{\tau_k} = \tau_{д.к}, \quad \theta = \frac{RT}{E}$$

принимает вид

$$\psi_1 = \frac{\tau_{д.к}}{\tau_{д.к} + e^{\frac{1}{\theta}}} \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho_{\phi}}}. \quad (6-21)$$

В этих выражениях обозначено: τ_k — кинетический масштаб времени, а τ_d — диффузионный масштаб времени. Индекс при ψ поставлен для того, чтобы отличить значение ψ из уравнения (6-6) от значения его ψ_2 из уравнения (6-7) — см. ниже. Уравнение подобного типа подробно исследовано в теории теплового режима горения [Л. 21].

На рис. 6-2 приведены зависимости $\psi_1 = f(\theta)$, рассчитанные для различных значений параметра $\tau_{д.к}$ с учетом изменения плот-

ности и в предположении $\rho = \text{const.}$ Из графиков видно, что численные значения полноты сгорания $\psi_1(\theta)$ заметно зависят от изменения плотности, особенно в области малых значений параметра $\tau_{д.к.}$. Существенно, что обе серии кривых имеют один и тот же характерный S-образный вид. Поэтому для приближенного анализа можно положить $\rho = \text{const.}$ Такое упрощение будет использовано ниже в расчете турбулентного диффузионного факела конечного размера.

Определим величины ψ_2 из уравнения теплового баланса, составленного для фронта пламени. Подставляя значения производ-

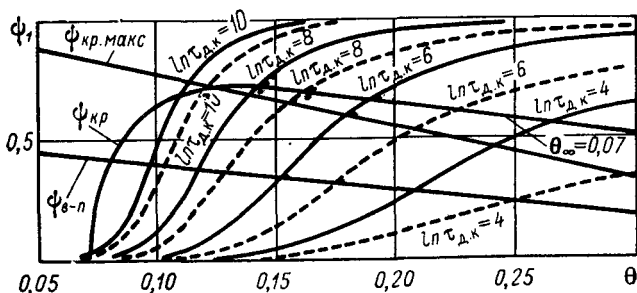


Рис. 6-2. Зависимость $\psi_1(\theta)$ при различных значениях параметра $\tau_{д.к.}$,
 — $\rho = \text{var.}$, — — — $\rho = \text{const.}$

ных $\partial c / \partial \rho$ и $\partial T / \partial \phi$ в равенство (6-7), после ряда несложных преобразований получаем

$$\rho_{\phi} D_{\phi} q \left\{ c_{+\infty} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\varphi_{\phi} \sqrt{\sigma_{\tau}} \right) \right] - 2c_{\phi} \right\}_a = \lambda (T - T_{+\infty}) 2.$$

Из решения последнего уравнения относительно ψ находим

$$\psi_2 = \frac{\lambda}{q c_{ga} \rho_{\phi} D_{\phi}} (T - T_{+\infty}).$$

Приведем правую часть этого равенства к безразмерному виду. Для этого выразим значение концентрации c_{ga} в виде $c_{ga} = \frac{1}{2} c_{+\infty} [1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_{\tau}})]$, обозначим $\theta = RT/E$, $\vartheta = q c_{a, +\infty} R / c_p E$ и, наконец, $\vartheta' = \vartheta / (1 + \beta)$. В результате получим

$$\psi_2 = \frac{1}{\vartheta'} (\theta - \theta_{+\infty}). \quad (6-22)$$

В дальнейшем, следуя [Л. 21], будем называть условно зависимость $\psi_1(\theta)$ кривой тепловыделения, $\psi_2(\theta)$ — кривой теплоотвода.

Соотношение (6-22) определяет в диаграмме $\psi\theta$ семейство прямых, берущих начало в точке $\theta_{+\infty}$ на оси абсцисс и наклоненных к последней под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\vartheta'}$. Совместное решение уравнений (6-18), (6-21) и (6-22) позволяет определить значения температуры и концентраций реагентов на фронте пламени, а также координату фронта $\varphi_{\text{ф}}$. Тем самым задача доводится до конца.

Варьируя значения параметров $\theta_{\text{ф}}$, ϑ , $\tau_{\text{д.к}}$, можно получить различные решения, отвечающие условиям устойчивого горения, а также критическим условиям воспламенения и потухания.

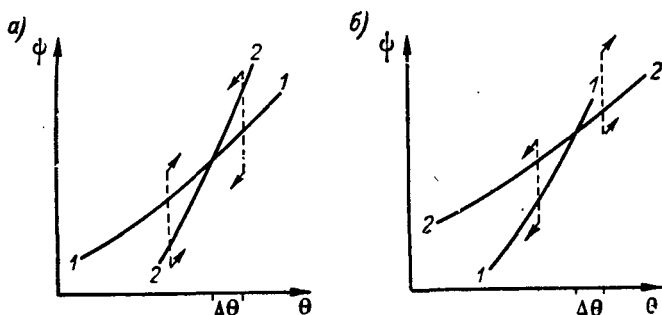


Рис. 6-3. Стационарные режимы процесса: а — устойчивый режим, б — неустойчивый режим.

1—1 — кривая тепловыделения; 2—2 — кривая теплоотвода.

Стационарные уровни процесса определяются условием равенства тепловыделения и теплоотвода ($\psi_1 = \psi_2$) и представляют собой в диаграмме $\psi\theta$ геометрическое место точек пересечения кривых $\psi_1(\theta)$ и $\psi_2(\theta)$. В теории теплового режима показано, что принципиально возможны три стационарных режима [три точки пересечения кривых $\psi_1(\theta)$ и $\psi_2(\theta)$], однако только два из них — верхний режим горения и нижний режим медленного окисления — являются устойчивыми [Л. 21; 75; 76]. Это нетрудно показать путем простейшего анализа устойчивости состояний равновесия методом малых возмущений.

Так, например, если температура по каким-либо случайным причинам повысилась на $\delta\theta$, то в новом состоянии (при температуре $\theta' = \theta + \delta\theta$) теплоотвод будет превышать тепловыделение (рис. 6-3). Это приведет, очевидно, к снижению температуры, т. е. к возврату системы в исходное положение. Аналогичным образом при уменьшении температуры система также будет стремиться к исходному состоянию, так как в этом случае тепловыделение будет превышать теплоотвод. В противоположность этому сколь угодно малые отклонения от промежуточного состояния будут приводить к нарастанию отклонения и, в конечном счете, к переходу на один из устойчивых уровней (рис. 6-3).

Из двух возможных устойчивых уровней в дальнейшем нас будет интересовать только верхний, отвечающий интенсивному процессу горения. Следует иметь в виду, что в рамках квазигетерогенной схемы анализ режима медленного окисления носит условный характер, так как в низкотемпературной области не выполняется основное допущение о наличии сравнительно узкой высокотемпературной зоны, положенное в основу расчета.

Рассмотрим стационарные уровни протекания процесса. С этой целью проанализируем влияние отдельных параметров (скорости потока, константы скорости реакции, теплотворности и др.), входящих в выражения (6-21) и (6-22), на ход кривых $\psi_1(\theta)$, $\psi_2(\theta)$ и на характер изменения стационарных значений температуры и полноты сгорания. Как видно из рис. 6-4, при прочих равных условиях увеличение скорости потока приводит к снижению полноты сгорания и температуры фронта пламени. В конечном итоге при достаточно высоких значениях начальной скорости может произойти срыв горения — потухание. Увеличение константы скорости реакции, а также увеличение теплотворности топлива (горючей смеси), ведет к росту полноты сгорания и температуры горения. Существенный интерес представляет влияние измене-

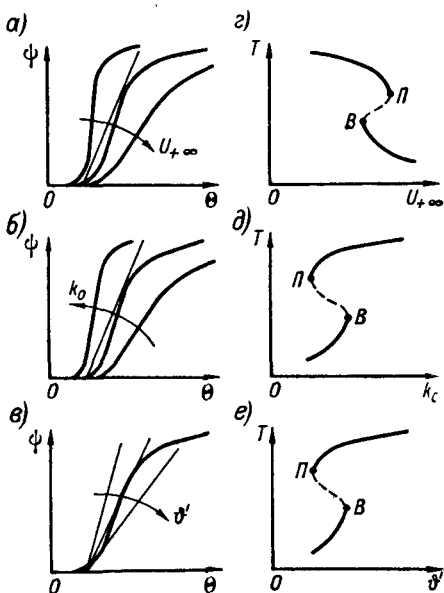


Рис. 6-4. Зависимость стационарных значений полноты сгорания и температуры горения от скорости истечения газа, константы k_0 и теплотворности топлива: а, б, в — влияние параметров на ход кривых $\psi_1(\theta)$; г, д, е — влияние параметров на стационарную температуру процесса (стрелкой указано направление возрастания параметра). П — потухание; В — воспламенение.

ния концентрации топлива и окислителя на тепловой режим горения газа. Выясним прежде всего характер влияния стехиометрического комплекса β на местоположение фронта пламени.

Из рис. 6-5 видно, что при изменении значения β от 0 до ∞ координата фронта ψ_f изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. В соответствии с этим при изменении β изменяются также величины ϑ' в соотношении (6-22) и $\tau_{д.к}$ в уравнении (6-21). Вид зависимости $\tau_{д.к} = f(\beta)$ показан на рис. 6-6.

Для более полного анализа рассмотрим влияние параметра β на ход кривых $\psi_1(\theta)$ в диаграмме $\psi\theta$ и условия их пересечения. На рис. 6-7 показан ряд кривых $\psi_1(\theta)$ для различных значений

стехиометрического комплекса β . Как видно из графика, значению $\beta = 1$ отвечает некоторое предельное (слева) положение кривой тепловыделения. Предельная кривая $\psi_1(\theta)_{\beta=1}$ соответствует такому случаю горения, при котором начальная концентрация топ-

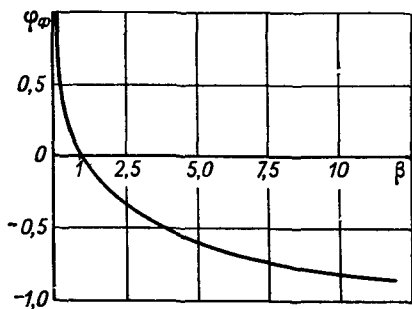


Рис. 6-5. Зависимость координаты фронта пламени от стехиометрического комплекса β .

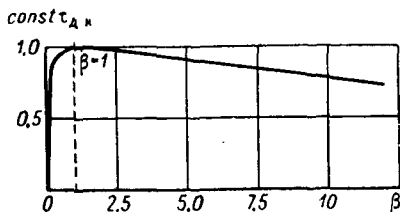


Рис. 6-6. Зависимость характерного времени процесса $\tau_{д.к}$ от стехиометрического комплекса β .

лива в Ω раз меньше концентрации окислителя в окружающем пространстве, т. е. начальные значения концентраций реагентов находятся в стехиометрическом соотношении. Изменение концентрации топлива или окислителя в ту или иную сторону ($\beta \leq 1$) при-

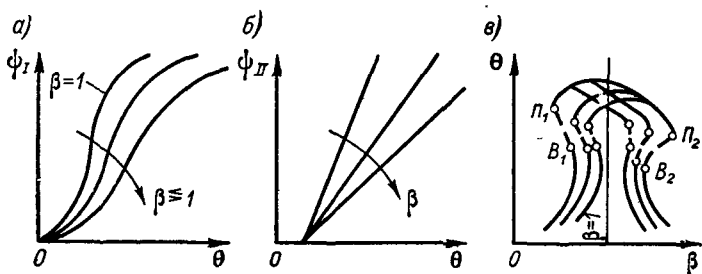


Рис. 6-7. Зависимость стационарных значений температуры и полноты сгорания от комплекса β : а и б — кривые $\phi_I(\theta)$ и $\phi_{II}(\theta)$; в — зависимость $\theta(\beta)$ при разных концентрациях топлива или окислителя (стрелками указано направление возрастания параметра).

водит к смещению кривых тепловыделения по направлению стрелки на рис. 6-7. Положение кривых теплоотвода при различных значениях параметра β показано на том же рис. 6-7.

Результаты графического решения уравнений теплового режима схематически представлены на рис. 6-7 в виде типичных кривых зависимости стационарного значения температуры θ (или линейно связанной с ней полноты сгорания ψ) от параметра β .

Рассмотрим сначала случай, когда одна из величин $c_{a, +\infty}$ или $c_{b, -\infty}$ равна единице. Пусть, например, значение $c_{b, -\infty} = 1$, а значение $c_{a, +\infty}$ меняется от 0 до 1 (при $\Omega = \text{const}$). В этом случае кривая $\theta(\beta)_{c_{b, -\infty}=1}$ изобразится левой ветвью огибающей кривой до точки максимума при $\beta = \Omega$. Аналогично этому правая ветвь соответствует изменению $c_{a, +\infty}$ от 0 до 1 при $c_{b, -\infty} = 1$. На обеих ветвях показаны критические условия воспламенения и потухания, связанные с увеличением (или уменьшением) доли активного реагента в топливе или окислителе. Поскольку параметр β пропорционален отношению концентраций, анализ его влияния продолжим, полагая одно из значений $c_{a, +\infty}$ или $c_{b, +\infty}$ постоянным (и меньшим единицы) и меняя второе значение от 0 до 1. Соответствующие кривые $\theta = f(\beta)$ нанесены на том же рис. 6-7. Из него видно, что огибающая кривая ($c_{a, +\infty} = 1$ или $c_{b, +\infty} = 1$) представляет собой геометрическое место конечных точек кривых для $1 > c_{a, +\infty} = \text{const}$ (или $1 < c_{b, -\infty} = \text{const}$), соответствующих максимальному значению температуры. Значение $\beta = \Omega$ отвечает самому высокому значению θ ; при этом же условии $\beta = \Omega$ пересекаются также левые и правые ветви кривых для одинаковых значений $c_{a, +\infty}$ и $c_{b, -\infty}$.

Таким образом, при заданном значении концентрации одного из реагентов снижение концентрации другого может привести к срыву горения, а повышение всегда вызывает увеличение температуры факела и его стабильности. Рассмотренная картина является общей для диффузионного горения при учете конечной скорости реакции.

6-2. Критические условия воспламенения и потухания

Как и в других случаях [Л. 21], исследование уравнений теплового режима приводит к возможности существования двух типов процесса—гистерезисного (с воспламенением и потуханием) и плавного—бескризисного. Последний, однако, близок к кинетическому горению в объеме факела. Поэтому обсуждение его в рамках квазигетерогенной схемы нецелесообразно.

Рассмотрим более подробно критические условия воспламенения и потухания. Эти условия определяются касанием кривых $\psi_1(\theta)$ и $\psi_2(\theta)$ в диаграмме ψ, θ , т. е. следующей системой уравнений:

$$\psi_1(\theta) = \psi_2(\theta), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}. \quad (6-23)$$

Используя (6-21) и (6-22), выведем соотношение для определения критической полноты сгорания. Дифференцируя выражение (6-21) по θ при постоянных параметрах β и τ , получаем

$$\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{д.к}}} \left[-\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{2\theta} \right]. \quad (6-24)$$

Так как $\sqrt{\frac{\theta}{\theta_{\infty}}} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \frac{1}{\tau_{д.к}} = \frac{1-\psi}{\psi}$ [см. выражение (6-21)], соотношению (6-4) можно придать вид

$$\frac{d\psi_1(\theta)}{d\theta} = \psi_1(\theta) [1 - \psi_1(\theta)] \frac{2-\theta}{2\theta^2}. \quad (6-25)$$

Из выражения (6-22) с учетом равенства $(1 + \beta)/\theta = \psi(\theta)/(\theta - \theta_{\infty})$ находим

$$\frac{d\psi_2(\theta)}{d\theta} = \frac{\psi_2(\theta)}{\theta - \theta_{\infty}}.$$

Приравняем теперь $\psi_1(\theta) = \psi_2(\theta)$ и $\psi'_1(\theta) = \psi'_2(\theta)$. Решая эти уравнения относительно ψ , получаем выражение, связывающее критическую полноту сгорания с критической температурой:

$$\psi_{кр} = 1 - \frac{2\theta^2}{(\theta - \theta_{\infty})(2 - \theta)}. \quad (6-26)$$

На диаграмме $\psi\theta$ (см. рис. 6-2) нанесены также предельные кривые, проходящие через максимальные значения критической полноты сгорания $\psi_{кр. макс}$ и через точки, в которых совпадают критические условия воспламенения и потухания $\psi_{в-п}$.

Из равенства $d\psi_{кр}/d\theta = 0$ вытекает, что

$$\theta_{\infty} = \frac{2\theta}{4 - \theta}.$$

Следовательно,

$$\psi_{кр. макс} = 1 - \frac{2\theta(4 - \theta)}{(2 - \theta)^2}.$$

Уравнение кривой, проходящей через точки, в которых совпадают критические условия воспламенения и потухания, определим из условия $d^2\psi_1(\theta)/d\theta^2 = 0$ в виде:

$$\psi_{в-п} = \frac{1}{2} \left[1 - 2 \frac{4\theta - \theta^2}{(2 - \theta)^2} \right] = \frac{1}{2} \psi_{кр. макс}. \quad (6-27)$$

Приведем также выражение, связывающее между собой параметры $\tau_{д.к}$ и $\theta_{кр}$. Это позволит проанализировать влияние скорости газового потока, а также константы скорости реакции на значения критической температуры воспламенения и потухания. Приравняв выражения (6-21) и (6-26), получим

$$\tau_{д.к.кр} = \frac{(2 - \theta)(\theta - \theta_{\infty}) - 2\theta^2}{2\theta^2} \sqrt{\frac{\theta}{\theta_{\infty}}} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right). \quad (6-28)$$

Предельное значение $\tau_{кр}$, соответствующее совпадению воспламенения и потухания, из уравнений (6-21) и (6-27) запишем в виде

$$\tau_{в-п} = \frac{(2 - \theta)^2 2 (4\theta - \theta^2)}{(2 - \theta)^2 - 2 (4\theta - \theta^2)} \sqrt{\frac{\theta}{\theta_{\infty}}} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right). \quad (6-29)$$

Так как при прочих равных условиях $\tau_{д.к} = \text{const} \frac{k}{U_{\infty}}$, соотношения (6-28) и (6-29) могут быть использованы для расчета влияния скорости газового потока и константы скорости реакции в отдельности.

Из рис. 6-8 и 6-9 видно, что изменение скорости газового потока и константы скорости реакции практически не влияет на величину температуры воспламенения. Температура потухания существенно зависит от $\tau_{д.к}$ (т. е. от значений $\dot{U}_{\infty}$ и k_0). При этом увеличение скорости потока U_{∞} ведет к росту температуры потухания $\theta_{п}$, а увеличение константы k_0 — к снижению значения $\theta_{п}$. Физически это означает, что при горении высокоактивных топлив (большие значения k_0) область устойчивого горения значительно расширена. Увеличение же скорости газового потока ведет к сокращению области устойчивого горения, так как срыв процесса происходит в области более высоких темпе- ратур.

Запишем также зависимость, связывающую критическую температуру с параметрами θ_{∞} и ϑ . Используя (6-26) и (6-22), для

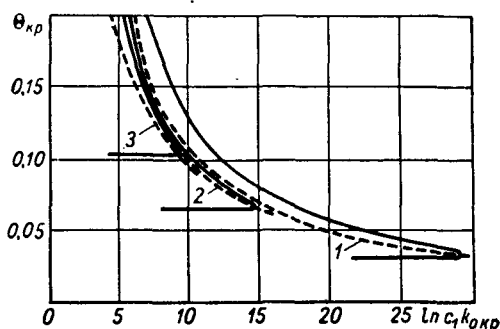


Рис. 6-8. Зависимость температуры воспламенения и потухания от константы k_0 . 1 — при $\theta_{\infty} = 0,03$; 2 — при $\theta_{\infty} = 0,06$; 3 — при $\theta_{\infty} = 0,09$, ($c_1 = \text{const}$). — — — совпадение воспламенения и потухания.

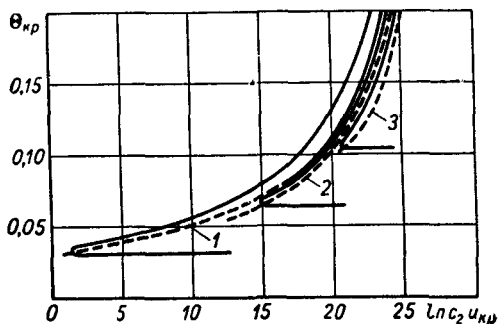


Рис. 6-9. Зависимость температуры воспламенения и потухания от скорости истечения газа. 1 — при $\theta_{\infty} = 0,03$; 2 — при $\theta_{\infty} = 0,06$; 3 — при $\theta_{\infty} = 0,09$ ($c_2 = \text{const}$). — — — совпадение воспламенения и потухания.

сравнительно низких температур $\theta \ll 1$ получаем

$$\theta_{кр} = \left[2 \left(3 + 2 \frac{1 + Q}{\vartheta} \right) \right]^{-1} \left\{ \left[2 + \theta_{\infty} \left(1 + 4 \frac{1 + Q}{\vartheta} \right) \right] \pm \sqrt{\left[2 - \theta_{\infty} \left(1 + 4 \frac{1 + Q}{\vartheta} \right) \right]^2 - 4 \left(3 + 2 \frac{1 + Q}{\vartheta} \right) 2\theta_{\infty} \left(1 + \frac{1 + Q}{\vartheta} \right) \theta_{\infty}} \right\}. \quad (6-30)$$

Знак минус перед радикалом в этом выражении соответствует воспламенению, знак плюс — потуханию.

Для высококалорийных смесей при $\vartheta \rightarrow \infty$ выражение (6-30) приобретает более простой вид:

$$\theta_{кр} \approx \frac{1 \pm \sqrt{1 - 6\theta_{\infty}}}{3}.$$

Исходя из этой приближенной формулы, оценим относительный разогрев системы, отвечающий воспламенению. Разложим подкоренное выражение в ряд. Ограничиваясь первыми членами разложения, получаем

$$\theta_v \approx \theta_{\infty} + \frac{3}{2} \theta_{\infty}^2 \text{ или } \frac{\theta_v - \theta_{\infty}}{\theta_{\infty}} = \frac{3}{2} \theta_{\infty}.$$

Заметим, что аналогичный расчет в пренебрежении изменением плотности дает относительный разогрев при воспламенении $\theta_v \approx 2\theta_{\infty}$, т. е. тот же порядок величины, что и при учете изменения плотности. С качественной стороны полученные результаты аналогичны соотношениям общей теории теплового режима горения. Это относится и к учету теплоотдачи от фронта пламени излучением. Опуская детали расчета, укажем, что дополнение граничного условия (6-3) еще одним членом — потерей тепла излучением — приводит к новым (теплообменным) условиям воспламенения и потухания. Физически это означает, что срыв горения возможен как при очень малых значениях скорости потока (большие $\tau_{д.к.}$), когда роль теплоотдачи велика, так и при интенсификации процесса по скорости, когда процесс при условиях, близких к адиабатным, переходит из диффузионной области в кинетическую. Подробнее об этом изложено в работе [Л. 21].

Все приведенные выше соотношения относились к простому случаю реакции первого порядка. С практической стороны больший интерес представляет газовая реакция второго порядка. Соответствующие преобразования уравнений в этом случае весьма громоздки и могут быть, видимо, оправданы только при конкретных вычислениях. С качественной стороны результаты для реакций первого и второго порядков совпадают, с количественной стороны они отличаются сравнительно мало. Поэтому расчет для реакции первого порядка может служить первым приближением и для более общего случая. Физическое объяснение этой близости связано

с определяющей ролью нелинейной экспоненциальной температурной зависимости константы скорости реакции.

Для подтверждения приведем краткое сопоставление некоторых формул и результатов расчета для случаев $n = 1$ и $n = 2$ без учета изменения плотности.

Выражение для скорости реакции входит в одно только уравнение материального баланса, составленное для поверхности фронта пламени. Поэтому задача сводится к исследованию этого уравнения.

Для реакции второго порядка уравнение (6-19) принимает вид

$$2D \frac{[\operatorname{erf}(\varphi \sqrt{\sigma_T})]'}{1 - \operatorname{erf}(\varphi \sqrt{\sigma_T})} (c_g - c_\phi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = k_0 c_g^2 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

или после преобразований

$$\psi_1^2 + 2\psi_1 \left[1 + \frac{\exp\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\tau'_{д.к}} \right] + 1 = 0.$$

Из решения этого уравнения получаем

$$\psi_1 = \left[1 + \frac{\exp\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\tau'_{д.к}} \right] \pm \sqrt{\left[1 + \frac{\exp\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\tau'_{д.к}} \right]^2 - 1}, \quad (6-31)$$

причем выражение для $\tau'_{д.к}$ имеет вид

$$\tau'_{д.к} = \frac{\left\{ 1 - [\operatorname{erf}(\varphi_\phi \sqrt{\sigma_T})]^2 \right\} ac_a + [1 + \operatorname{erf}(\varphi_\phi \sqrt{\sigma_T})]}{[\operatorname{erf}(\varphi \sqrt{\sigma_T})]' k_d u_\infty k_0 \cdot 2}.$$

На рис. 6-10 для значения $\tau'_{д.к} = 8$ нанесены две кривые, рассчитанные для реакций первого и второго порядков. Из графика видно, что кривые тепловыделения для реакций первого и второго порядков как с учетом изменения плотности, так и при $\rho = \text{const}$ аналогичны и сравнительно близки друг к другу. При прочих равных условиях кривые $\psi_1(\theta)$ для реакций второго порядка располагаются несколько ниже соответствующих кривых для реакций первого порядка. Так как выражение $\psi_2(\theta)$ не зависит от порядка реакции, а стационарные значения температуры и полноты сгорания определяются равенством $\psi_1 = \psi_2$, очевидно, что при одинаковых начальных условиях температура (полнота сгорания) для

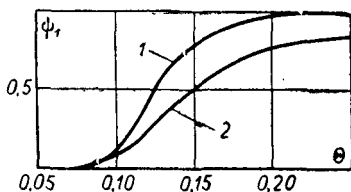


Рис. 6-10. Зависимость $\psi_1(\theta)$ для первого (1) и второго (2) порядков реакций.

реакций первого порядка будет незначительно выше, чем для реакций второго порядка. Этот результат относится и к расчету критических состояний.

Подведем краткие итоги. Сочетание предположения о протекании реакций горения с конечной скоростью на фронте пламени с уравнениями переноса без источников, как и в схеме с бесконечной скоростью реакций, привело к замкнутой краевой задаче. Из ее решения находятся местоположение фронта пламени, значения температуры и полноты сгорания на нем, а также профили скорости, ρu^2 , температуры и концентраций во всей области смешения. По поводу профилей следует указать, что практический смысл имеют два решения — в области высокой, близкой к единице, полноты сгорания и в области практического отсутствия горения. Для первого из них хорошим приближением служит расчет профилей в предположении бесконечной скорости реакций, для второго — расчет смешения газов при отсутствии горения. Таким образом, основной смысл учета конечной скорости реакций состоит в установлении области существования стабильного режима горения диффузионного факела и условий его срыва.

6-3. Факел конечного размера

В предыдущих параграфах задача об устойчивости горения неперемешанных газов в свободном плоском турбулентном пограничном слое решалась в предположении об автомодельности течения. Очевидно, что при этом критические условия воспламенения и потухания получались едиными для всей области горения. Иными словами, при такой постановке задачи заранее предполагается, что срыв горения происходит одновременно во всех точках фронта пламени.

В реальном факеле течение вблизи сопла неавтомодельно. Поэтому здесь при изменении одного из параметров наблюдаются более сложные явления, чем описанное выше потухание фронта пламени (например, отрыв пламени от сопла и повисание над ним и др. — см. [Л. 11 и др.]). В этом случае критические характеристики не определяются приведенной координатой $\varphi = y/ax$, а зависят от обеих координат y и x в отдельности. В связи с этим расчет факела удобнее вести по методу эквивалентной задачи теории теплопроводности. Задача о тепловом режиме горения затопленного факела сводится тогда к интегрированию системы уравнений типа теплопроводности (1-26) с соответствующими граничными условиями. Решение такой задачи в полном объеме сопряжено с большими трудностями. Ограничимся поэтому преимущественно качественным исследованием.

Воспользуемся для этой цели решением для случая $\sigma = 1$ задачи о факеле конечного размера, изложенным в § 2-3.

Для определенности выберем затопленный осесимметричный факел, т. е. положим $m = 0$ и $L(\xi, y) = P(\xi, y)$. С помощью вы-

ражений для концентрации топлива, указанных в табл. 2-4, определим производные $\partial c_a / \partial y$ по обе стороны фронта пламени:

$$\left(\frac{\partial c_a}{\partial y} \right)_1 = \frac{c_{a0} P'(\xi, y)}{1 - P(\xi_\phi, y_\phi)} \cdot \frac{\sqrt{\omega_I}}{\sqrt{P(\xi_\phi, y_\phi)}},$$

$$\left(\frac{\partial c_a}{\partial y} \right)_2 = \frac{c_{a\phi} \omega_{II}}{\omega_{II} + 1} \cdot \frac{P'(\xi, y)_\phi}{P(\xi_\phi, y_\phi)}.$$

Подставим значения производных в уравнение (5-8) с учетом равенства $c_{ag} = c_{a0} P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)$ и получим:

$$\rho_\phi D_\phi \left\{ \frac{P'(\bar{\xi}, \bar{y})_\phi}{1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} \cdot \frac{\sqrt{\omega_I}}{P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} \left[\frac{c_{ag}}{P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} - c_{a\phi} \right] - \right. \\ \left. - \frac{P'(\bar{\xi}, \bar{y})_\phi}{P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} \cdot \frac{\omega_I c_{a\phi}}{\omega_{II} + 1} \right\} = k_0 W(c) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \quad (6-32)$$

Положим, как и ранее, $W(c) \approx \rho c$, а также $\psi = 1 - (c_\phi/c_g)$. Из уравнения (6-32) находим

$$\psi_1 = 1 - \frac{\frac{P'(\bar{\xi}, \bar{y})_\phi}{[1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} D_\phi \sqrt{\omega_I}}{k_0 \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right) + D_\phi \frac{P'(\bar{\xi}, \bar{y}) \sqrt{\omega_I}}{P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) [1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)]} \times} \cdot (6-33) \\ \times \left\{ P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) + \frac{\omega_{II}}{\omega_{II} + 1} [1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] \right\}$$

В дальнейшем используем это соотношение для анализа режима горения в начальном участке факела, так как именно эта область зоны горения определяет условия стабилизации факела в целом. Выражение (6-33) может быть существенно упрощено, если пренебречь изменением плотности в поперечных сечениях, т. е. принять

$\frac{2}{\sqrt{\omega_I}} \cdot \frac{\omega_{II}}{\omega_{II} + 1} = 1$. Так как функция $P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)$ в пределах

начального участка изменяется незначительно и может быть принята приближенно равной 0,5, то выражение, стоящее в фигурных скобках в уравнении (6-33), с достаточной степенью точности можно считать равным единице. При сделанных допущениях уравнение (6-33) приводится к обычному для теории теплового режима виду:

$$\psi_1 = \frac{\tau_{д.к}}{\tau_{д.к} + c^{\frac{1}{\theta}}}, \quad (6-34)$$

где

$$\tau_{д.к} = \frac{P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) [1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] k_0}{D P'(\bar{\xi}, \bar{y})_\phi}, \quad (6-35)$$

при малых значениях $\bar{\xi}$ (начальный участок) производная $P'(\bar{\xi}, \bar{y})$ пропорциональна отношению $y_\phi / \sqrt{\bar{\xi}_\phi}$.

Так как в начальном участке диффузионный фронт пламени представляет собой поверхность, близкую к цилиндрической с радиусом, практически равным радиусу сопла r_0 , то в первом приближении можно принять $y_\phi \approx 1$. Из экспериментальных данных [Л. 41] следует, что в начальном участке эффективная координата $\bar{\xi}$ может быть представлена степенной функцией координаты:

$$\bar{\xi} \sim x^{2n},$$

где $n > 1$.

С учетом равенства для коэффициента турбулентной диффузии $D = k_t u_0 x$ и приближенного равенства $P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) \approx \text{const}$ выражению (6-35) можно придать вид

$$\tau_{д.к} = \text{const} \frac{x^{n-1}}{u_0} k_0.$$

Перейдем к преобразованию уравнения (6-3). Для этого определим производные $(\partial T / \partial y)_I$ и $(\partial T / \partial y)_{II}$ на фронте пламени по обе его стороны:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_I = \frac{P'(\bar{\xi}, \bar{y})_\phi \sqrt{\omega_I}}{[1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} (T_\infty - T_0),$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{II} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{II} + 1} \cdot \frac{P'(\bar{\xi}, \bar{y})_\phi}{P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)} (T_\phi - T_\infty).$$

Подставим значения производных $(\partial c_a / \partial y)_I$, $(\partial c_a / \partial y)_{II}$, $(\partial T / \partial y)_I$ и $(\partial T / \partial y)_{II}$ в уравнение (6-3); после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \rho_\phi D_\phi q \left\{ \left\{ c_g - c_\phi \left[P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) + \frac{1}{\sqrt{\omega_I}} \cdot \frac{\omega_{II}}{\omega_{II} + 1} [1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] \right] \right\} \right\} = \\ = \lambda \{ P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) (T_\phi - T_0) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\omega_I}} \cdot \frac{\omega_{II}}{\omega_{II} + 1} [1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] (T_\phi - T_\infty) \}. \end{aligned} \quad (6-36)$$

В дальнейшем будем считать, что начальные значения температуры топлива и окислителя одинаковы: $T_0 = T_\infty$. С учетом приближенного равенства

$$\left\{ P^{0.5}(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi) + \frac{1}{\sqrt{\omega_I}} \cdot \frac{\omega_{II}}{\omega_{II} + 1} [1 - P(\bar{\xi}_\phi, \bar{y}_\phi)] \right\} \approx 1$$

соотношению (6-36) можно придать вид

$$\psi_2 = \frac{1}{\vartheta} (\theta - \theta_\infty),$$

где

$$\vartheta = \frac{q c_g R}{c_p E}.$$

Как и в задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе, равенство $\psi_1 = \psi_2$ позволяет определить стационарные режимы процесса, а система равенств $\psi_1 = \psi_2$ и $\psi'_1 = \psi'_2$ — критические условия воспламенения и потухания.

Анализ теплового режима диффузионного факела, как и в других случаях, выполним с помощью диаграммы $\psi\theta$. Не приводя уравнений, связывающих отдельные параметры, остановимся на анализе специфических особенностей теплового режима горения факела конечного размера. Для этого прежде всего проследим за изменением стационарных значений температуры и полноты сгорания и, в частности, за критическими условиями воспламенения и потухания при варьировании параметра $\tau_{д.к}$.

Из рис. 6-11 видно, что при увеличении параметра $\tau_{д.к}$ кривые $\psi_1(\theta)$ смещаются к оси ординат. Следовательно, при прочих равных условиях (при заданных значениях параметров ϑ , θ_0 , $k_0 = \text{const}$) увеличение характерного времени процесса вызывает рост стационарных значений температуры и полноты сгорания. И, наоборот, уменьшение $\tau_{д.к}$ ведет к снижению температуры и в конечном счете к потуханию.

Особенностью рассматриваемой неавтомодельной задачи является зависимость характерного времени процесса $\tau_{д.к}$ от продольной координаты x . Поэтому процесс горения в каждом поперечном сечении факела характеризуется своим специфическим значением времени $\tau_{д.к}$, а не единым для всего факела в целом, как это было при автомодельном течении. Каждому поперечному сечению факела отвечает своя кривая тепловыделения $\psi_1(\theta)$ (см. рис. 6-11), причем сечениям, расположенным на больших расстояниях от среза сопла, соответствуют кривые, смещенные к оси ординат на диаграмме $\psi\theta$.

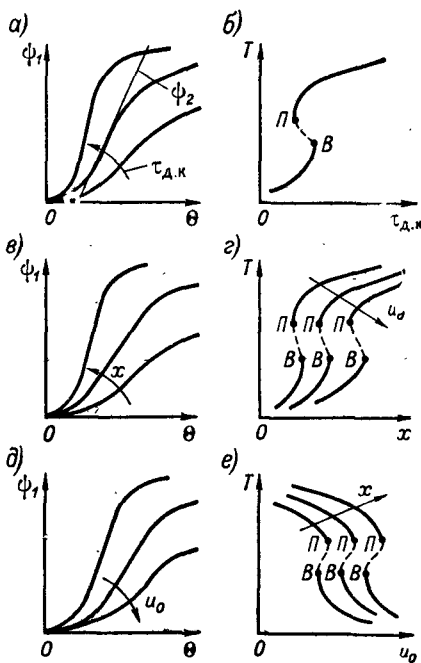


Рис. 6-11. Зависимость стационарных значений температуры и полноты сгорания от характерного времени процесса $\tau_{д.к}$ и скорости истечения газа: а и б — влияние $\tau_{д.к}$; в и г — изменение стационарных значений температуры по длине факела; д и е — влияние u_0 (стрелками указано направление возрастания параметра).

Стационарные значения температуры и полноты сгорания для каждой точки факела пламени определяются условиями пересечения соответствующих кривых $\psi_2(\theta)$ с кривой тепловыделения. Характер изменения стационарных значений температуры вдоль зоны горения показан на том же рис. 6-11. Из графика видно, что сечениям, расположенным на больших расстояниях от среза сопла, соответствуют более высокие значения температуры. И, наоборот, по мере приближения к основанию факела происходит монотонное снижение температуры. Переохлаждение зоны горения в этой области факела ведет к переходу процесса из устойчивой диффузионной области в кинетическую. В конечном счете при достаточно малых (критических) расстояниях от сопла зажигание становится невозможным.

Физическая картина отрыва пламени заключается в том, что вблизи сопла происходит наиболее интенсивное смешение реагирующих компонентов (область высоких градиентов). В результате наступает местное переохлаждение фронта и потухание. По мере увеличения скорости истечения газа граничная точка (воспламенения и срыва) перемещается вниз по потоку, при уменьшении — смещается к устью горелки.

Влияние скорости истечения на характер изменения стационарных значений температуры для различных точек зоны горения показано на рис. 6-11, б, г, е. Из графика видно, что воспламенение и потухание в одной и той же точке фронта пламени происходит при различных значениях скорости u_0 . Отсюда, в частности, следует, что процесс срыва и обратной посадки пламени имеет гистерезисный характер. Влияние других параметров (θ_0 , ϑ) на характер изменения температуры вдоль фронта пламени также показано на рис. 6-11. При увеличении начальной температуры и теплотворности газа расширяется область устойчивого горения и граничная точка смещается к основанию факела.

Таким образом, расчет дает физически правильную картину явления и позволяет предсказать наблюдаемые в эксперименте эффекты отрыва пламени и обратной посадки его. Наряду с качественным анализом устойчивости турбулентного диффузионного факела конечного размера приведенный расчет позволяет получить количественные оценки для конкретных условий.

Глава седьмая

ГОРЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

7-1. О расчете турбулентного факела

В отличие от предыдущих глав, посвященных горению неперемешанных газов, в этой главе рассмотрим особенности, присущие турбулентному газовому факелу, возникающему при сжигании заранее подготовленной однородной смеси. В то время как при

диффузионном горении газов горючая смесь топлива и окислителя образуется непосредственно в зоне горения, в гомогенном факеле к фронту пламени притекает готовая горючая газовая смесь. Рассматривая движение относительно системы координат, связанной с потоком свежей смеси, естественно говорить о скорости распространения пламени в неподвижной горючей смеси.

При ламинарном горении пламя распространяется с так называемой нормальной скоростью. Теория такого горения и распространения пламени подробно разработана [Л. 45]. Величина нормальной скорости распространения пламени является важной физико-химической характеристикой горючей смеси. Она определяется кинетикой реакции и теплопроводностью смеси. По порядку величины:

$$W_n \sim \sqrt{\frac{a}{\tau_p}},$$

где a — коэффициент температуропроводности; τ_p — характерное время реакции:

$$\tau_p \sim k^{-1} \sim \frac{1}{k_0} \exp\left(\frac{E}{RT}\right),$$

если k — приведенная константа скорости реакции первого порядка. Результаты эксперимента по определению нормальной скорости согласуются с теорией.

Сложнее обстоит дело с турбулентным горением. Формально и для него по аналогии с нормальной скоростью ламинарного горения вводят понятие скорости распространения турбулентного горения W_T . Значение W_T определяют из условия стационарности фронта пламени (закон В. А. Михельсона [Л. 61]) из равенства

$$W_T = u_n = u \cos(\mathbf{u}, \mathbf{n}),$$

где u_n — нормальный к фронту компонент вектора скорости потока свежей смеси, притекающей к фронту. Это кинематическое условие ничего не говорит о природе турбулентного горения. Опыт показывает, что величина W_T не является физико-химической константой смеси, а зависит от ряда режимных факторов. По существу она определяется всем комплексом явлений и должна быть отнесена к числу определяемых, а не определяющих характеристик сложного процесса турбулентного горения газовой смеси.

Существующие теории распространения турбулентного пламени, развитые впервые К. И. Щелкиным и Дамкеллером [Л. 98, 100], имеют преимущественно качественный характер и основываются главным образом на соображениях размерности. Принято различать скорость мелкомасштабного турбулентного горения:

$$W_T \sim \sqrt{\frac{a_T}{\tau_p}}, \quad a_T \sim lu'$$

(где a_T — коэффициент турбулентной температуропроводности, l — путь смешения, u' — пульсационная скорость) и скорость крупно-

масштабного турбулентного горения

$$W_T \sim u' \left(\text{при } \tau_p \sim \frac{l}{u'} \right).$$

Эти представления выдвигают на первый план интенсификацию процессов переноса в турбулентном потоке, но игнорируют влияние турбулентности на макрокинетику реакций (см. § 5-3). Недостаточно согласуются между собой и с теоретическими формулами опытные данные по определению скорости турбулентного горения. Все это лишает величину W_T надежности, необходимой для выбора ее в качестве опорной характеристики в расчете турбулентного го-могенного факела. Если, однако, пренебречь этим и считать величину W_T заданной, то тем самым однозначно определяется место-положение фронта пламени в факеле и становится в принципе возможным детальный расчет газодинамической структуры, т. е. распределения скорости, температуры и концентрации во всем поле факела. При неопределенном месте расположения фронта и предположении о бесконечно большой скорости реакции аэродинамический расчет «сходится» во всех случаях. Это означает, что при любом произвольно заданном местоположении фронта можно найти распределение скорости, температуры и концентрации, удовлетво-ряющее дифференциальным уравнениям и граничным условиям. Для единственности решения необходимо дополнительное условие. В связи с этим целесообразно обсудить различные подходы к этой проблеме — отбору единственного решения из множества удов-летворяющих общей постановке задачи.

Первая попытка решения содержится в работе Г. Н. Абрамо-вича [Л. 1], в которой предполагается, что фронт пламени в го-могенном факеле находится на внутренней границе области сме-шения. После этого расчет аэродинамической структуры (в предпо-ложении универсальности профиля скорости) сводится к типичной струйной задаче. Попытаемся подойти к этому же вопросу, исходя из различных физических моделей.

В качестве первого варианта расчета можно прибегнуть к чисто газодинамической трактовке явления. Под этим подразумевается представление фронта пламени как поверхности сильного разрыва — теплового скачка в газовом течении [Л. 24; 28]. В такой схеме пол-ностью игнорируется не только кинетика реакций, но и процессы переноса (турбулентные теплопроводность и диффузия). Горение (под этим понимаем мгновенное тепловыделение и нагрев продуктов сгорания) в схеме теплового скачка локализуется на поверхности разрыва. Естественно, что и здесь исходным уравнениям — усло-виям сохранения импульса, массы и энергии — можно удовлетво-рить при любом, произвольно заданном значении угла между по-верхностью разрыва и потоком свежей смеси. Добавляя к этому некоторое вариационное соотношение¹, сводящееся к отбору экс-

¹ По аналогии, например, с задачами об отборе стационарной скорости детонации [Л. 28; 46] или о расчете центробежной форсунки [Л. 3] и т. п.

тремального значения одной из величин, меняющихся немонокотонно при изменении угла наклона фронта, можно обеспечить единственность решения.

Разумеется, что результаты расчета при такой постановке задачи не могут отражать ряд специфических свойств процесса горения, в первую очередь связанных с температурной зависимостью реакций горения, а также с прогревом и расширением газа до фронта.

Такого рода расчет, неизбежно приближенный, интересен тем, что позволяет оценить значение перепада давления на фронте и соответствующее ему ускорение потока. Это важно для гомогенного факела в связи с оценкой допущения о постоянстве давления во всем поле факела, лежащего в основе теории свободных струй. Для диффузионного факела, в котором фронт отнесен далеко во внешнюю область факела, пренебрежение полем давления вполне допустимо. Для гомогенного факела этот вопрос нельзя считать окончательно решенным ни в теоретическом, ни в экспериментальном плане. Поэтому после определения местоположения фронта пламени расчет структуры факела будет иметь более качественный характер, чем для диффузионного горения. Отсюда следует, что такого рода расчет можно вести со значительными упрощениями, отвечающими исходной точности постановки задачи.

Возвратимся, однако, к методам расчета местоположения фронта пламени в турбулентном гомогенном факеле.

Во втором (после газодинамического расчета) варианте расчета будем исходить из задания турбулентной скорости пламени, заимствуя ее значение из опыта или теоретических формул. В этом варианте можно будет при определенных предположениях довести до конца расчет структуры факела и, в частности, определить местоположение фронта. Задание величины $W_{т}$, согласующейся с экспериментом, предполагает в неявном виде задание кинетических характеристик реакции (включая влияние на них турбулентных пульсаций).

Наконец, третий вариант расчета выполним, как и в случае диффузионного факела, путем наиболее полного сочетания представлений и методов расчета теории струй и теплового режима горения. Для этого будем исходить из квазигетерогенной схемы процесса и считать кинетику реакций конечной и заданной. Для отбора единственного решения и здесь потребуется дополнительное условие (оно было бы ненужным только в прямом расчете, учитывающем протекание реакций во всем объеме факела), которое будет простым и физически очевидным.

Последовательному рассмотрению этих вариантов расчета гомогенного турбулентного факела и некоторому сопоставлению результатов расчета, выполненного при различных предположениях, будут посвящены следующие три параграфа этой главы. Отсутствие достаточно подробного и надежного опытного материала (профилей pu^2 , температуры, давления, скорости и др.) не позволяет,

к сожалению, закончить эту главу сравнением экспериментальных и расчетных данных. Поэтому содержание ее ограничено простейшим случаем факела (начальный участок) и в известной мере ориентировано на выявление вопросов, подлежащих дальнейшему экспериментальному и теоретическому исследованию.

7-2. Газодинамический расчет фронта пламени

В соответствии с общей постановкой задачи, изложенной в предыдущем параграфе, представим фронт пламени в потоке однородной газовой смеси в виде поверхности сильного разрыва. На такой

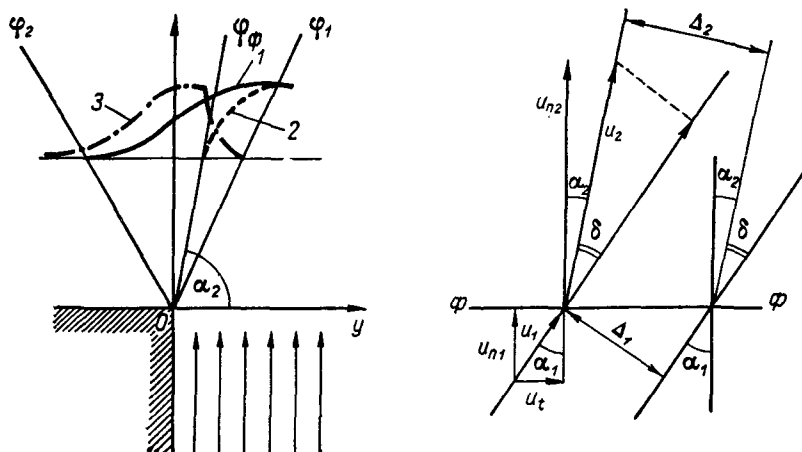


Рис. 7-1. Схема фронта пламени.

поверхности косо́го теплового скачка [Л. 28] происходят в результате сгорания свежей смеси мгновенное тепловыделение и нагрев продуктов сгорания до максимальной температуры. На ней претерпевают разрыв скорость потока, давление, температура и др. Схема такого фронта пламени представлена на рис. 7-1. В общем случае угол α_1 между вектором скорости набегающего потока и нормалью к поверхности разрыва (угол падения) может принимать любое значение в пределах от 0 до $\pi/2$. Значение 0 отвечает наиболее интенсивному тепловому скачку, расположенному под прямым углом к потоку свежей смеси (прямой скачок). Значение $\pi/2$ соответствует вырождению скачка в тангенциальный разрыв, т. е. отсутствию горения.

Заметим, что в этих двух крайних случаях ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \pi/2$), и только в них, линии тока не будут преломляться на фронте и поток не будет отклоняться от прежнего направления. Во всех остальных (промежуточных) случаях вектор скорости за фронтом

повернется относительно прежнего направления на некоторый угол отклонения

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2,$$

где α_2 — значение угла между вектором $\mathbf{u}_2$ и нормалью к фронту — угла преломления. Для теплового скачка всегда $\alpha_2 < \alpha_1$. Иначе говоря, отклонившийся после фронта пламени поток газа сближается с нормалью к фронту в противоположность тому, что происходит при адиабатическом скачке.

При плавном изменении значения угла падения α_1 от 0 до $\pi/2$ и неизменном значении тепловыделения вместе с углом α_1 будут меняться расчетные значения всех кинематических и динамических характеристик — угла преломления α_2 , угла отклонения δ , отношения значений скорости и давления до и после фронта и др. Все они, за исключением одного только угла отклонения δ , будут меняться монотонно. И только значение δ , равное нулю при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = \pi/2$, пройдет при некотором промежуточном между 0 и $\pi/2$ значении угла падения $\alpha_1 = \alpha_{1*}$ через максимум $\delta = \delta_*$.

Поскольку опыт свидетельствует об однозначности эффекта, так как при заданном значении теплотворности смеси, а также всех величин до фронта угол α_1 всегда принимает одно и то же значение, можно предположить, что это значение $\alpha_1 = \alpha_{1*}$. Иначе говоря, кажется правдоподобным, что реализуется именно то единственное значение угла отклонения δ_* , которому соответствует только одно значение угла $\alpha_1 = \alpha_{1*}$. Это предположение положено в основу приведенного ниже расчета. Физическое толкование его будет дано ниже.

Рассмотрим сперва количественную сторону вопроса. Запишем в качестве исходных уравнений условия сохранения массы, импульса (в проекции на нормаль и касательную к фронту пламени) и энергии при пересечении газом поверхности разрыва. Для простоты газ будем считать идеальным ($P = \rho RT$) и пренебрежем изменением состава и теплоемкости при горении. Обозначим индексом 1 значения переменных до фронта и индексом 2 — за фронтом, а также индексами n и t — соответственно нормальный и касательный к фронту компоненты скорости. Уравнения сохранения при этом имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 u_{n1} &= \rho_2 u_{n2}, \\ \rho_1 + \rho_1 u_{n1}^2 &= \rho_2 + \rho_2 u_{n2}^2, \quad u_{t1} = u_{t2} = u_t, \\ T_1 + \frac{u_{n1}^2}{2c_p} + \frac{Q}{c_p} &= T_2 + \frac{u_{n2}^2}{2c_p}. \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

В этих равенствах $u_{ni} = u_i \cos 2\alpha_1$ (для $i = 1, 2$); Q — тепловыделение на единицу смеси.

В качестве безразмерной характеристики тепловыделения введем отношение величины Q к полной энтальпии газа до фронта,

рассчитанной по нормальному к фронту компоненту скорости:

$$q = \frac{Q}{c_p T_1 + \frac{u_{n1}^2}{2}} = \frac{Q}{c_p T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \cos^2 \alpha_1\right)},$$

где $\gamma = c_p/c_v$; $M = u/a$ — число Маха; $a = \sqrt{\gamma RT}$ — местная скорость звука.

Для $M_1^2 \ll 1$ (и тем более для $M^2 \cos^2 \alpha_1 \ll 1$, так как в опыте значение угла α_1 сравнительно близко к $\pi/2$) можно приближенно принять:

$$q \approx \frac{Q}{c_p T_1}, \quad \frac{T_2}{T_1} \approx 1 + q. \quad (7-2)$$

Поскольку отношение давлений при $M_1^2 \ll 1$ близко к единице, в том же приближении будет

$$\frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx \frac{T_2}{T_1} = 1 + q. \quad (7-3)$$

Из закона «преломления» (см. рис. 7-1) следует, что

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}, \quad \frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = 1 + q. \quad (7-4)$$

В общем случае при произвольном расположении теплового скачка отношение u_2/u_1 , а также другие характеристики разрывного течения будут функциями двух параметров — угла падения α_1 и относительной теплотворности смеси q . Например, отношение продольных компонент скорости (в направлении вектора скорости потока свежей смеси) будет равно

$$\frac{u_{*2}}{u_{*1}} = \frac{u_{*2}}{u_1} = 1 + \frac{q}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1},$$

относительное изменение давления выразится в виде

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_1 u_1^2} = q \cos^2 \alpha \quad \text{или} \quad \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \gamma M^2 q \cos^2 \alpha_1$$

и т. д.

Запишем также выражения для угла отклонения

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{q \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + q + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \quad (7-5)$$

и для относительной скорости распространения фронта $W_\tau = u_n$

$$\frac{W_\tau}{u_i} = \cos \alpha_1.$$

В случае, когда $\alpha = \alpha_{1*}$ и $\delta = \delta_*$ при максимальном преломлении линии тока, расчетные соотношения упрощаются. Угол

падения определяется при этом равенством

$$\operatorname{tg} \alpha_{1*} = \sqrt{1+q},$$

а максимальный угол отклонения

$$\operatorname{tg} \delta_* = \frac{q}{2\sqrt{1+q}},$$

так что значения этих углов связаны между собой простым равенством

$$\delta_* = 2\alpha_{1*} - \frac{\pi}{2}. \quad (7-6)$$

На рис. 7-2 для нескольких значений q показаны кривые зависимости $\delta = \delta(\alpha_1, q)$ и прямая, проходящая через максимумы значений угла отклонения. Этому случаю (максимум преломления) отвечают простые формулы:

для изменения модуля скорости

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_* = \sqrt{1+q}; \quad (7-7)$$

для изменения продольной составляющей скорости

$$\left(\frac{u_{x2}}{u_{x1}}\right)_* = 2 \frac{1+q}{2+q}; \quad (7-8)$$

для изменения плотности тока

$$\left(\frac{\rho_2 u_2}{\rho_1 u_1}\right)_* = \frac{1}{\sqrt{1+q}}; \quad (7-9)$$

для изменения давления

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho_1 u_1^2}\right)_* = \frac{2}{2+q}; \quad (7-10)$$

для зависимости скорости распространения фронта от теплотворности горючей смеси

$$\left(\frac{W_T}{u_1}\right)_* = \frac{1}{\sqrt{2+q}}. \quad (7-11)$$

Наиболее примечательно то, что при $\alpha_1 = \alpha_{1*}$ отношение $(\rho_2 u_2^2 / \rho_1 u_1^2)_* = 1$, т. е. значение плотности потока импульса (по модулю вектора скорости) не меняется в скачке.

Конечно, полученные в расчете закономерности (в частности, рост угла α_{1*} и снижение скорости распространения разрыва W_T при увеличении теплотворности q) отвечают принятой предельной схеме явления — бесконечно большой скорости реакции и отсутствию отвода тепла к свежей смеси.

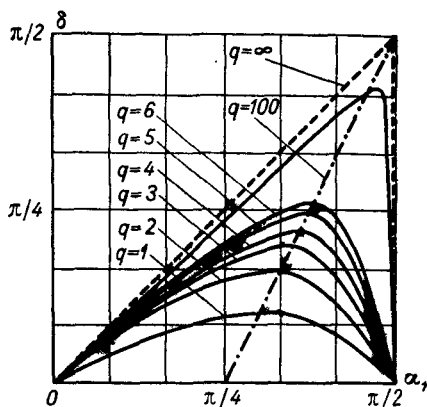


Рис. 7-2. Зависимость угла преломления линий тока от угла падения.

Заметим, что для горения смеси углеводородов с воздухом (при $T \approx 300^\circ \text{ K}$) значение $q \approx 6$. Для $q = 6$ имеем

$$\alpha_{1*} = 67^\circ, \quad \delta_* = 48^\circ, \quad \left(\frac{u_2}{u_1}\right) = 2,65, \quad \left(\frac{u_{x2}}{u_{x1}}\right) = 1,75,$$

$$\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 u_1^2}\right) = 0,75.$$

В этом случае, как видно из приведенных значений, фронт пламени в расчетных условиях максимального отклонения (для зна-

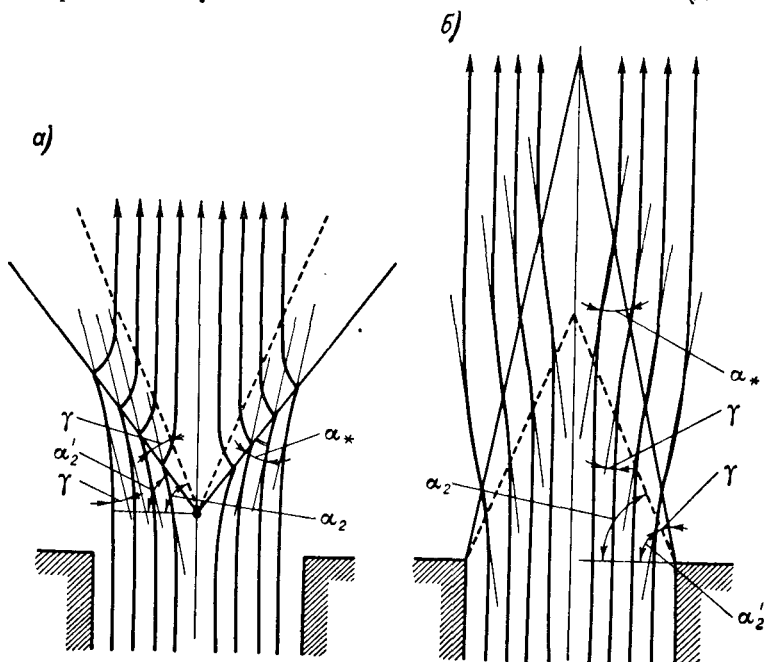


Рис. 7-3. Схема фронта пламени при горении однородной смеси: а — за стабилизатором; б — на бунзеновской горелке.

чения $q = 6$) располагается сравнительно круто. Обращает на себя внимание заметный рост продольной скорости u_{x2} сравнительно со значением u_1 , а также то, что перепад давления на фронте соизмерим со скоростным давлением набегающего потока.

Для сравнения с опытом приведем схему гомогенного факела с прямым и обращенным фронтами пламени (рис. 7-3). Опыт примерно соответствует значению $q = 6$. Расчетное значение $\alpha_{1*} = 67^\circ$ заключено между значениями $\alpha_1 = 60^\circ$ и $\alpha_2 \approx 83^\circ$ соответственно для прямого и обращенного факелов. С качественной стороны это расхождение можно объяснить искривлением линий тока в связи с разогревом свежей смеси при подходе к фронту. Как видно из

фотографий на рис. 7-4, для прямого конуса пламени следует ожидать значения $\alpha_1 = \alpha_{1*}$, а для обращенного $\alpha_1 < \alpha_{1*}$, поскольку расчетное значение α_{1*} относится к невозмущенному потоку свежей смеси. Таким образом, характер отклонения от расчета согласуется с опытом.

На рис. 7-5 представлена фотография обращенного факела, в который вводились для наблюдения за изменением скорости на фронте

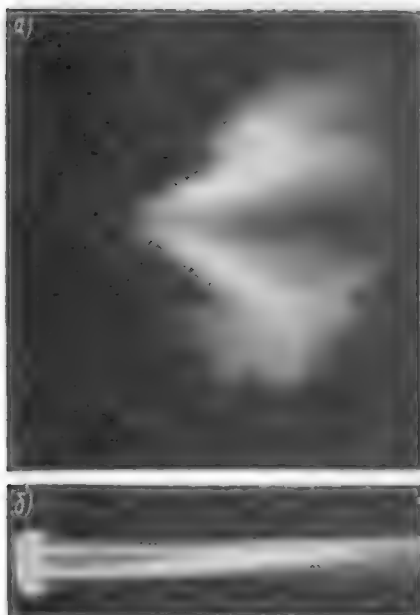


Рис. 7-4. Фотографии факела при горении однородной смеси: *а* — за стабилизатором; *б* — на бунзеновской горелке.



Рис. 7-5. Фотография треков частиц кварца, проходящих через фронт пламени.

кварцевые пылинки, оставлявшие характерные треки, видные на фотографии. Как следует из снимка и приведенного расчета, значение скорости после фронта пламени заметно (в полтора-два раза) больше, чем до него. Это также качественно сходится с расчетом.

7-3. Расчет факела по скорости турбулентного горения

При заданной скорости турбулентного распространения пламени местоположение фронта пламени в гомогенном факеле однозначно определяется кинематическим соотношением В. А. Михельсона

$$\alpha_1 = \arccos \frac{W_T}{u_\Phi}, \quad (7-12)$$

где, как и раньше, u_ϕ — скорость потока свежей смеси перед фронтом; W_T — скорость распространения пламени; α_1 — угол между вектором скорости и нормалью фронта.

Значение W_T может быть заимствовано из экспериментальных данных по турбулентной скорости распространения пламени для аналогичных условий. Данные такого рода приведены в ряде работ [Л. 50; 78; 100]. Можно также выполнить расчет в более общей постановке, используя одну из теоретических формул для определения величины W_T . Обычно скорость турбулентного горения задается в виде функции пульсационной скорости u' , нормальной скорости горения W_n и др. Поэтому расчет местоположения фронта пламени может быть выполнен путем совместного рассмотрения выражения для скорости горения и соотношений, определяющих аэродинамическую структуру факела.

В связи с некоторой неопределенностью в закономерностях гомогенного факела (учет поля давления, ускорение газа на фронте, о чем говорилось в предыдущем параграфе) отсутствует надежный критерий для выбора метода расчета профилей скорости, температуры и концентрации в гомогенном турбулентном факеле. Только в результате подробного и тщательно выполненного экспериментального исследования могут быть получены данные, необходимые для уточнения расчетной схемы. При отсутствии таких данных целесообразно, как это сделано ниже, прибегнуть к наиболее простому расчету и с его помощью показать возможность построения подробной картины факела. Таким простейшим расчетным путем является предположение о сохранении в начальном участке факела того же универсального профиля скорости, что и в струе несжимаемой жидкости. Проиллюстрируем сказанное здесь на примере расчета.

Для расчета скорости турбулентного горения воспользуемся известной моделью, предложенной К. И. Щелкиным.

Для крупномасштабной турбулентности, наиболее вероятной в свободных турбулентных течениях, скорость распространения пламени может быть, согласно данным работы [Л. 98], записана в виде:

$$W_T = Au' \sqrt{1 + Bk^2 \left(\frac{W_n}{u_\phi} \right)^2}, \quad (7-13)$$

где W_T — скорость распространения пламени в турбулентном потоке, u_ϕ — осредненная скорость потока вблизи зоны горения; W_n — скорость нормального распространения пламени; $k = \sqrt{\bar{u}'^2 / \bar{u}}$ — число Кармана; u' — пульсационная составляющая скорости; A, B — эмпирические постоянные, близкие по порядку величины к единице.

Во многих случаях зависимость величины W_T от пульсационной скорости и нормальной скорости горения представляют в виде степенного комплекса:

$$W_T \sim u'^r (W_n)^p, \quad r + p = 1. \quad (7-14)$$

При сильной турбулентности значение показателя степени r близко к единице, а значение показателя p соответственно мало. Здесь предполагается стабильное протекание горения, когда скорость реакции весьма велика и у корня факела имеются «поджигающие точки», обеспечивающие непрерывное и устойчивое воспламенение свежей смеси.

Обращаясь к схеме факела на рис. 7-1, легко прийти к выводу, что наиболее вероятным будет расположение турбулентного фронта пламени внутри пограничного слоя — в области смешения, так как среди спектра значений скорости от 0 до u_∞ обязательно найдется значение u_ϕ , удовлетворяющее закону В. А. Михельсона. Такое предположение было высказано впервые Г. Н. Абрамовичем [Л. 1].

Из выражений (7-12) и (7-14) с учетом формулы Прандтля $u' = l (du/dy)$ получается следующее равенство для u_ϕ :

$$u_\phi = \left(l \frac{du}{dy} \right)^2 W_\infty^p \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Если перейти к универсальной функции от приведенной координаты $\bar{\varphi} = (y/ax) + \bar{\varphi}_0$ (см. § 1-2) и учесть, что длина пути турбулентного смешения возрастает пропорционально x , т. е. $l = C_1 x$, то в результате простых преобразований получим

$$\frac{F'(\bar{\varphi}_\phi)}{[F''(\bar{\varphi}_\phi)]^2} = C_1 \frac{W_\infty^p}{u_\infty^p} \left(1 + \frac{1}{a^2 \varphi_\phi^2} \right)^{1/2}. \quad (7-15)$$

Уравнение (7-15) определяет местоположение фронта пламени в свободном турбулентном потоке. При заданном виде функции $F'(\bar{\varphi})$ для определенных значений r и p можно из уравнения (7-15) найти соответствующее значение координаты фронта пламени φ_ϕ . В предельном случае, когда $r = 1$, а $p = 0$, т. е. когда турбулентная скорость распространения пламени пропорциональна пульсационной составляющей скорости турбулентного течения, W_t зависит лишь от константы турбулентности a и не зависит от скорости нормального распространения пламени W_∞ и через нее от теплотворности смеси.

Для количественного расчета воспользуемся выражением для турбулентной скорости распространения пламени (7-13). С учетом его уравнение (7-12) запишем в виде

$$u_\phi^2 = -Al \frac{du}{dy} \sqrt{u_\phi^2 + Bk^2 W_\infty^2} \frac{\sqrt{1 + a^2 \varphi_\phi^2}}{a \varphi_\phi}. \quad (7-16)$$

После перехода к функции $F'(\bar{\varphi}_\phi)$ и некоторых простых преобразований получаем трансцендентное уравнение:

$$\frac{[F'(\bar{\varphi}_\phi)]^4}{[F'(\bar{\varphi}_\phi)]^2 + C_2 \left(\frac{W_\infty}{u_\infty} \right)^2} = C_1 [F'(\varphi_\phi)]^2 \left(1 + \frac{1}{a^2 \varphi_\phi^2} \right),$$

где $C_1 = aA^2/2$, $C_2 = B/k^2$ — постоянные. Приняв для функций $F'(\bar{\varphi})$ и $F''(\bar{\varphi})$ (см. § 6-1) выражения

$$F'(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi})], \quad F''(\bar{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\bar{\varphi}^2),$$

получим окончательно

$$\frac{[F'(\bar{\varphi}_\Phi)]^4}{[F'(\bar{\varphi}_\Phi)]^2 + C_2 \left(\frac{W_H}{u_\Phi}\right)^2} = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} [\exp(-\bar{\varphi}_\Phi^2)]^2 \left(1 + \frac{1}{a^2 \bar{\varphi}_\Phi^2}\right). \quad (7-17)$$

Уравнение (7-17) может быть решено графически. Результаты решения представлены на рис. 7-6. При решении постоянные A и B были приняты равными единице, константа турбулентности $a = 0,1$, интенсивность турбулентности $k = 0,2$. В расчете были приняты два значения скорости потока u_∞ .

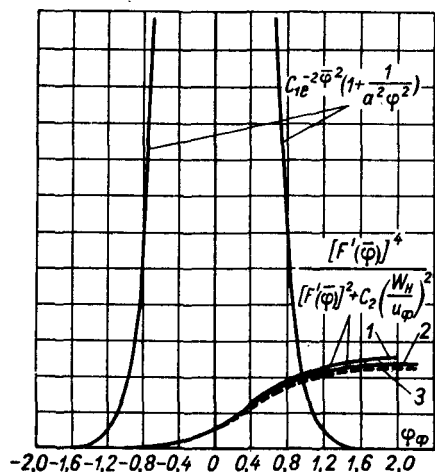


Рис. 7-6. Графическое решение уравнения (7-17).

1 — при $u_\Phi/u_0 = 0,01$ и $\rho_\Phi/\rho_0 = 0,02$; 2 — при $u_\Phi/u_0 = 0,02$ и $\rho_\Phi/\rho_0 = 0,02$; 3 — при $u_\Phi/u_0 = 0,02$ и $\rho_\Phi/\rho_0 = 1$.

профиля скорости в начальном участке струи при наличии фронта пламени. На том же рис. 7-6 для сравнения нанесена также пунктирная кривая, полученная при расчете по методу подобия ρu^2 для $\omega = 0,2$. В этом случае с возрастанием степени перегрева ω фронт пламени стремится повернуться по направлению к внешней части струи; то же самое получается при увеличении скорости истечения струи u_∞ . Первый из этих выводов согласуется с приведенным Г. Н. Абрамовичем в работе [Л. 1] результатом. Второй вывод представляется физически правдоподобным. Действительно, до тех пор, пока в турбулентном факеле сказывается влияние нормальной скорости распространения пламени

Как видно из графика, при увеличении скорости истечения струи в пять раз положение фронта пламени в потоке практически не изменяется. В зоне горения при значениях A и B , равных единице, значение приведенной координаты фронта $\varphi_\Phi = 0,97 \div 0,98$, т. е. фронт расположен вблизи внутренней границы турбулентного пограничного слоя, определенной по теории конечного слоя Толмина — Абрамовича.

Рассмотренный выше расчет был проведен в предположении универсальности

на протекание процесса, влияние изменения физических условий должно быть качественно таким же, как и в случае ламинарного горения, когда наклон фронта пламени к потоку всецело зависит от отношения W_n/u_∞ . Этот вывод справедлив и для случая расчета при $\rho = \text{const}$. Влияние теплотворности смеси на W_T и координату фронта φ_Φ определяется видом зависимости $W_n = W_n(q)$, где $q = Q/c_p T$.

Таким образом, из выражений (7-16) и (7-17) следует, что зависимости $W_T(q)$ и $\varphi_\Phi(q)$, полученные выше, качественно противоположны аналогичным выражениям, приведенным в предыдущем параграфе и отвечающим газодинамической схеме фронта теплового скачка.

Наконец, на основании найденного значения φ_Φ из уравнения В. А. Михельсона нетрудно получить выражение для турбулентной скорости распространения пламени:

$$W_T = \frac{a\varphi_\Phi F'(\varphi_\Phi)}{\sqrt{1 + a^2\varphi_\Phi^2}} u_\infty. \quad (7-18)$$

В первом приближении (для случая крупномасштабной турбулентности) скорость турбулентного распространения пламени можно принять пропорциональной первой степени скорости истечения смеси. Однако в общем случае ввиду того, что значение координаты фронта пламени φ_Φ само зависит от величины скорости истечения смеси [см. выражение (7-17)], скорость турбулентного распространения пламени можно представить в виде $W_T \sim u_\infty^m$, где показатель степени $m < 1$.

7-4. Тепловой режим гомогенного факела

В предыдущих параграфах задача о горении однородной газовой смеси в турбулентном факеле рассматривалась в одной из двух частных постановок. В первой из них газодинамический расчет фронта пламени — поверхности теплового скачка — дополняется предположением о максимальном отклонении потока. Во второй скорость турбулентного горения на фронте считалась заданной априори. Тем самым в неявном виде в основу расчета была положена квазигетерогенная схема. В обоих случаях введение дополнительного условия приводило к отбору единственного решения — для местоположения фронта и для всей задачи в целом.

Рассмотрим в заключение более общий и последовательный расчет факела на основе сочетания методов теории турбулентных струй и теплового режима горения [Л. 30]. Для облегчения задачи введем ряд упрощений, оправдавших себя в теории и расчете диффузионного факела. К числу их относится прежде всего квазигетерогенная модель фронтального горения горючей смеси при конечной скорости реакций. При замене этой схемой реального процесса с протеканием реакций в некотором объеме возникает

необходимость введения нового дополнительного условия для определения местоположения фронта пламени. Это условие легко, однако, выбрать из простых физических соображений. Достаточно сделать вполне правдоподобное предположение о том, что фронт пламени располагается в факеле в месте, отвечающем максимально возможной температуре (и, соответственно, полноте сгорания), как задача получает единственное решение и в принципе доводится до конца. Это значит, что решение позволяет определить координату фронта пламени, а с нею и скорость распространения турбулентного горения, профили характерных величин, полноту сгорания и, наконец, критические условия воспламенения и потухания и их зависимость от основных параметров. И хотя практическое осуществление такого расчета для конкретных условий сопряжено

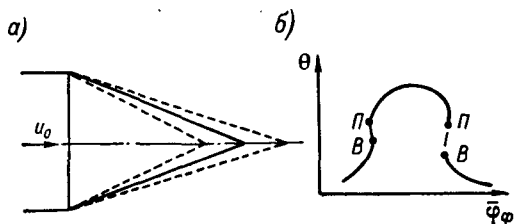


Рис. 7-7. Схема гомогенного факела.

горючей смеси вытекает в неограниченное пространство, заполненное воздухом или инертным газом (рис. 7-7, а). Пусть турбулентный фронт пламени занимает некоторое среднее положение. Скорость реакции будем считать при этом конечной, но столь большой, что фронт пламени можно схематически рассматривать как поверхность.

Допустим, как было сказано выше, что температура максимальна на фронте. Это, конечно, не требует доказательства, так как наличие максимума температуры вне зон горения — в области, в которой источники тепла отсутствуют и происходит одно только перемешивание, — физически нереально. Этим не ограничивается сделанное допущение. Необходимо пойти дальше и допустить, что фронту пламени отвечает максимально возможная в данных условиях температура, т. е. наибольшая скорость сгорания и, соответственно, наибольшее количество сгорающего газа. Действительно, легко представить себе, что фронт горения, не удовлетворяющий этому условию, будет неустойчив. Любое отклонение в этом случае привело бы к повышению скорости сгорания и к «автоматическому» смещению фронта в положение, соответствующее возможному максимуму температуры. Устойчивость этого положения может нарушиться лишь тогда, когда скорость подвода горючей смеси превысит возможную скорость сгорания. Тогда произойдет обычное потухание [Л. 21]. Это условие (критическое), как и

со значительными техническими трудностями, принципиальная возможность его представляет несомненный интерес.

Качественную картину горения турбулентного гомогенного факела представим в следующем виде. Допустим, что струя стехиометрической

всегда в задачах теории теплового режима, также содержится в результатах расчета.

Если же целью расчета является только построение профилей температуры, скорости и концентрации для интенсивного горения вдали от срыва, то достаточно определить местоположение фронта пламени. Его нельзя было бы, однако, найти (без специального допущения) в предположении о бесконечно большой скорости реакции. В этом случае все мыслимые положения фронта равноправны и всем им отвечает одно и то же значение температуры горения. При конечной скорости реакции только одному положению фронта отвечает максимум температуры и полноты сгорания; это положение и является решением задачи.

Количественный расчет проведем на простейшем примере авто-модельной задачи о горении стехиометрической смеси в свободном турбулентном плоскопараллельном пограничном слое (см. рис. 7-1).

Имея в виду главным образом качественную сторону, поступим проще — пренебрежем изменением плотности, т. е. будем решать систему уравнений (6-1) для случая $\rho = \text{const}$. При заметном сокращении выкладок это не внесет существенного искажения в конечные результаты расчета.

Как и при рассмотрении плоского фронта пламени в задаче о диффузионном факеле (см. § 6-1), из уравнений движения и неразрывности находится единое для всего поля течения решение динамической задачи (профиль скорости). Уравнения энергии и диффузии интегрируются раздельно для областей по обе стороны фронта пламени (поверхности слабого разрыва), а затем полученные решения смыкаются на фронте.

Граничные условия запишем в виде:

на внешних границах факела

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_{+\infty}} = 1, \quad \frac{\Delta c}{\Delta c_{+\infty}} = 1, \quad \frac{\Delta i}{\Delta i_{+\infty}} = 1 \quad \text{при } y = +\infty, \\ \frac{u}{u_{-\infty}} = 0, \quad \frac{\Delta c}{\Delta c_{-\infty}} = 1, \quad \frac{\Delta i}{\Delta i_{-\infty}} = 1 \quad \text{при } y = -\infty; \end{aligned} \right\} \quad (7-19)$$

на фронте пламени при $y = y_\Phi$

$$\Delta c = 0, \quad \Delta i = 0,$$

$$\rho_\Phi D_\Phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_1 - \rho_\Phi D_\Phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_2 = x k_0 W(c) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (7-20)$$

$$q \left\{ \rho_\Phi D_\Phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_1 - \rho_\Phi D_\Phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_2 \right\} = \lambda_\Phi \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_1 + \lambda_\Phi \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{II}, \quad (7-21)$$

где x — функция, учитывающая отличие среднего значения константы скорости реакции от значения ее при средней температуре в турбулентном потоке; $W(c)$ — функция концентраций реагентов, вид которой определяется порядком реакций; индексы $+\infty$ и $-\infty$ относятся соответственно к горючей смеси и окружающему

факел газу (продуктам сгорания), индекс «ф» указывает, что значение заданной величины берется на фронте пламени, индексы 1 и 2 относятся к потокам, подходящему к фронту и отходящему от него.

Заметим, что расчет в квазигетерогенном приближении ограничен по физическим предпосылкам (интенсивное горение) областью вблизи максимальной температуры. В этой области различие между средней константой реакций и ее значением, рассчитанным по средней температуре, невелико. Поэтому в дальнейшем примем значение $\kappa \approx 1$ и в расчете в первом приближении пренебрежем эффектом, связанным с влиянием турбулентных пульсаций температуры. Роль его, как указано в § 5-3, особенно велика при низких значениях температуры — вблизи области воспламенения (и, конечно, при высоких значениях интенсивности турбулентных пульсаций).

Для простоты решения примем $T_{+\infty} = T_{-\infty} = T_{\infty}$, $c_p = \text{const}$, т. е. $\Delta i = c_p \Delta T$, а также $W(c) = \rho c$. Последнее отвечает простой реакции первого (суммарного) порядка. Решение автомодельной задачи известно [см. формулы (6-12) — (6-17)].

Для определения неизвестных из газодинамического расчета значений температуры и концентрации на фронте пламени используем условия (7-20) и (7-21) — уравнения материального и теплового баланса, которые легко привести к виду (6-21) и (6-22), обычному в теории теплового режима горения [Л. 21].

Стационарные значения температуры и концентрации определяются из условия равенства теплоотвода и тепловыделения в зоне горения:

$$\psi_1 = \psi_2. \quad (7-22)$$

В это уравнение входит неизвестная еще величина $\bar{\varphi}_\phi$ — координата фронта пламени. Задавая значения $\bar{\varphi}_\phi$ из соотношения (7-22), можно определить величину стационарной температуры горения для заданных условий ($\mu_{+\infty}$, $c_{+\infty}$, $T_{+\infty}$ и т. д.).

Зависимость температуры на фронте от координаты $\bar{\varphi}_\phi$ схематически показана на рис. 7-7, б. Согласно развитым в начале параграфа представлениям, примем для обеспечения единственности решения условие

$$\frac{d\theta_\phi}{d\bar{\varphi}_\phi} = 0. \quad (7-23)$$

Применяя условие (7-23) к соотношению (7-20), получаем связь между максимальной температурой горения и координатой $\bar{\varphi}_\phi$:

$$\theta = \frac{1}{\ln \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\tau'}{\tau} \cdot \frac{[1 + \text{erf}(\bar{\varphi}_\phi \sqrt{\sigma_\tau})]}{[\text{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_\tau})]_\phi'} } \right\}}. \quad (7-24)$$

Используя выражения (7-22) и (7-24), приходим к трансцендентному уравнению, определяющему местоположение фронта пламени, в виде зависимости координаты фронта $\bar{\varphi}_\Phi$ от теплотворности смеси:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{\tau'}{\tau} \cdot \frac{[1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\Phi \sqrt{\sigma_\tau})]}{[\operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_\tau})]'_\Phi}}} = \frac{2}{\vartheta} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\Phi \sqrt{\sigma})} \times$$

$$\times \frac{1}{\ln \left\{ - \frac{\tau}{1 + \frac{\tau'}{\tau} \cdot \frac{[1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_\Phi \sqrt{\sigma_\tau})]}{[\operatorname{erf}(\bar{\varphi} \sqrt{\sigma_\tau})]'_\Phi}} \right\} - \theta_\infty}. \quad (7-25)$$

Следует отметить, что уравнение (7-25) имеет три корня. Два из них, как известно из теории теплового режима, определяют устойчивые режимы: горение и медленное окисление. Третий корень, соответствующий промежуточному режиму, отвечает неустойчивому состоянию системы (рис. 7-8). В связи с этим при решении уравнения (7-20) необходимо выбирать корень, отвечающий верхнему режиму — горению.

Результаты расчета местоположения фронта пламени в зависимости от теплотворности смеси, скорости потока и других параметров приведены на рис. 7-9. Как видно из графика, повышение теплотворности смеси вызывает смещение фронта пламени к внутренней границе пограничного слоя. Этот результат подтверждает высказанное Г. Н. Абрамовичем [Л. 1] предположение о расположении фронта пламени при горении высококалорийных смесей вблизи границы области смешения. Увеличение приведенного коэффициента турбулентной структуры струи и повышение реакционной способности смеси k_0 приводят также к смещению фронта пламени в сторону набегающего потока. Противоположное по характеру влияние оказывает на местоположение фронта пламени увеличение скорости струи.

Для примера на рис. 7-9, б пунктиром нанесена также зависимость $\bar{\varphi}_\Phi = f(\vartheta)$ при другом значении начальной температуры смеси: $\theta_\infty = 0,064$. Как видно из рисунка, в случае увеличения начальной температуры смеси процесс горения может проходить и в бескризисном режиме. Последнее находится в полном соответ-

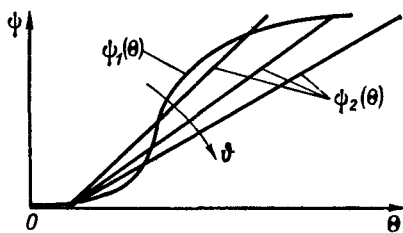
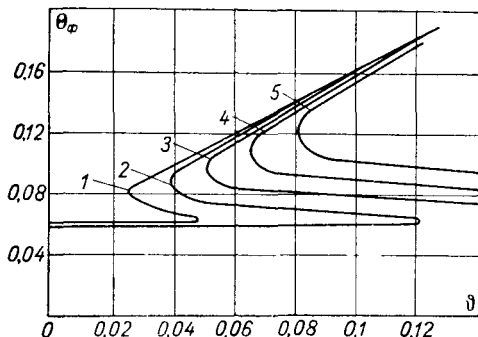


Рис. 7-8. Зависимости $\varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2(\theta)$ при различных значениях параметра ϑ (стрелкой указано направление возрастания ϑ).

вии с известными положениями теории теплового режима [Л. 21]. Зависимость температуры горения от теплотворности смеси приведена на рис. 7-9, б.

Значительный интерес представляет вопрос о влиянии параметров процесса на полноту сгорания. На рис. 7-10 показана зависимость полноты сгорания от начальной скорости истечения газа и теплотворности смеси. Из этого графика видно, что увеличение скорости или уменьшение теплотворности приводит к снижению полноты сгорания.

а)



б)

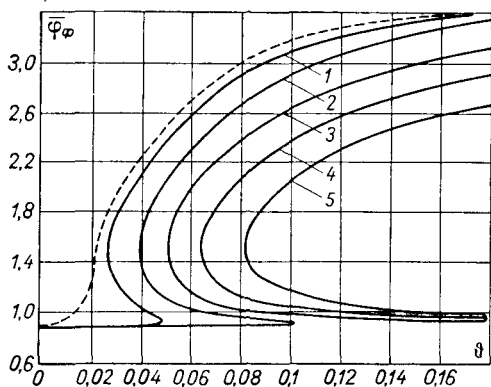


Рис. 7-9. Зависимость температуры горения θ_ϕ (а) и координаты фронта пламени Φ_ϕ (б) от теплотворности смеси ϑ . 1 — при $u_\infty = 1$ м/сек; 2 — при $u_\infty = 2,71$ м/сек; 3 — при $u_\infty = 7,3$ м/сек; 4 — при $u_\infty = 21$ м/сек; 5 — при $u_\infty = 54,2$ м/сек.

равным 0,05, получаем величину угла наклона фронта к оси $\text{arctg}(y/x) = 5^\circ 30'$.

На рис. 7-11 приведена фотография турбулентного гомогенного факела, полученная на бунзеновской горелке с диаметром сопла 30 мм. Сплошной линией показано рассчитанное по соотношению (7-25) местоположение фронта пламени. Из рисунка видно, что

Приведенные выше качественные выводы проиллюстрируем следующим примером.

Рассмотрим горение смеси углеводородного топлива с воздухом, характеризующееся стехиометрическим соотношением $\Omega = 15,5$ (по воздуху), теплотворностью 10^4 ккал/кг и энергией активации $E = 4 \cdot 10^4$ ккал/моль·град. Значение приведенного кинетического комплекса k_0 положим равным $12 \cdot 10^6$. Для данных условий величина безразмерной характеристики теплотворности составляет 0,092. Этому значению теплотворности газовой смеси (при $u_\infty = 20$ м/сек) соответствуют значения $\Phi_\phi = 2,26$ и $\theta_\phi = 0,148$. Принимая коэффициент турбулентной структуры струи при горении

имеется качественное соответствие расчета с опытом. Следует отметить, что результаты расчета дают возможность определить осредненное значение скорости турбулентного распространения пламени.

Действительно, зная $\bar{\varphi}_\phi$, можно по правилу В. А. Михельсона найти значение u_T из соотношения (7-18). Определенная таким образом скорость турбулентного горения учитывает факторы как газодинамической, так и кинетической природы. Косвенно (через

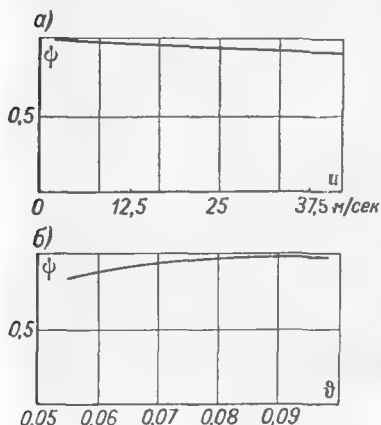


Рис. 7-10. Зависимость полноты сгорания от скорости истечения (а) и теплотворности смеси (б).



Рис. 7-11. Фотография турбулентного гомогенного факела (линия — расчет).

посредство эмпирической постоянной a) на ней сказывается также уровень турбулентности потока и др.

На рис. 7-12 представлены расчетные данные по влиянию скорости набегающего потока на местоположение фронта пламени и на величину скорости турбулентного распространения пламени. Как видно из графика, увеличение скорости истечения смеси приводит к уменьшению угла наклона фронта по отношению к направлению движения потока и росту скорости турбулентного распространения пламени. При этом зависимость $u_T = f(u_\infty)$ может быть аппроксимирована (как это обычно делается в теории горения) в виде

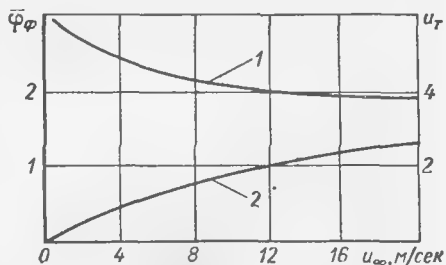


Рис. 7-12. Зависимость координаты фронта пламени и турбулентной скорости распространения пламени от скорости истечения.

$$1 - \bar{\varphi}_\phi = f(u_\infty); 2 - u_T = f(u_\infty).$$

$$u_T = ku_\infty^n \quad (u_\infty \sim u'). \quad (7-26)$$

Как следует из сопоставления выражения (7-26) и соотношения (7-18), показатель степени $n \approx 0,75$.

Приведенные графики иллюстрируют главным образом расчет местоположения фронта, а также влияние скорости потока и

теплотворности на скорость турбулентного распространения пламени. Все необходимые данные для построения профилей скорости, температуры и концентрации имеются в приведенных выше расчетных формулах. Вид основных профилей для гомогенного факела внешне мало отличается от вида профилей для диффузионного факела, если расчет выполняется в упрощающем предположении $\rho = \text{const}$. Последнее, конечно, совсем необязательно. Заметим в связи с этим, что расчет по методу подобия ρu^2 (как в § 7-3) приводит к заметному увеличению на фронте пламени продольного компонента скорости по сравнению с его значением в потоке свежей смеси ($u_{x2} > u_{x1}$). Отсутствие надежных опытных данных не позволяет проверить справедливость этого результата, согласующегося с оценкой, полученной из газодинамического расчета, и указать оптимальный путь детального расчета. Несмотря на это, развитая в этом параграфе расчетная схема гомогенного турбулентного факела при конечной скорости реакции в принципе является законченной и качественно отвечает эксперименту.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФАКЕЛА

Глава восьмая

ДИФфуЗИОННОЕ ГОРЕНИЕ В ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ПОТОКЕ

8-1. Расчет ламинарного факела

Методы расчета диффузионного факела, развитые в первой части книги для движения газа с малыми относительно единицы значениями числа Маха, опираются на разнообразный и достаточно надежный экспериментальный материал. Не так обстоит дело с изучением факела при движении с большой дозвуковой и, особенно, сверхзвуковой скоростью.

В этом случае, представляющем практический интерес для новой техники, опытных данных еще сравнительно мало и специфика процесса выявлена недостаточно. По-видимому, центральной задачей в этой области является обеспечение устойчивого воспламенения и горения высокоскоростного факела, т. е. тот круг вопросов, в котором струйная теория факела смыкается с теорией теплового режима горения. Однако первым шагом, который может в известной мере пролить свет на особенности скоростного факела, является перенесение на случай $M > 1$ методов расчета, оправдавших себя для малой скорости. С этой целью проведем расчет высокоскоростного диффузионного ламинарного (а в следующем разделе — турбулентного) факела. Оба случая относятся к одному и тому же типу стационарного безударного струйного течения перемешанных газов в поле постоянного давления — к свободному плоскопараллельному пограничному слою. Оба они ограничены допущением о бесконечной скорости реакций горения и пренебрежением явлениями диссоциации, ионизации и т. п. [Л. 39; 105].

При расчете ламинарного высокоскоростного факела будем считать заданными следующие величины в невозмущенных потоках (рис. 8-1): $T_{+\infty}$, $T_{-\infty}$, $M_{+\infty}$, $c_{+\infty}$, $c_{-\infty}$ и $p_{+\infty} = p_{-\infty}$.

Исходная система уравнений, записанная в переменных А. А. Дородницына, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ u \frac{\partial \bar{i}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{i}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{i}}{\partial \bar{\eta}^2} + (k-1) M_{+\infty}^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \right)^2, \\ u \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{1}{\text{Sc}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\eta}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

где u, v — компоненты вектора скорости; c — концентрация газа; $i = c_p T$ ($c_p = \text{const}$); M — число Маха; ξ, η — переменные. А. А. Дородницына, $\bar{v} = \bar{\rho} \bar{v} + \bar{u} \partial \bar{\eta} / \partial x$; $\bar{i} \rho = 1$; $\bar{u} = u/u_{+\infty}$; $\bar{v} = v/u_{+\infty} \sqrt{\text{Pr}}$; $\bar{i} = i/i_{+\infty}$; $\bar{\rho} = \rho/\rho_{+\infty}$; $\text{Re} = u_{+\infty} L/\nu_{+\infty}$; L — произвольный масштаб длины. В дальнейшем черточки над безразмерными величинами для краткости опущены.

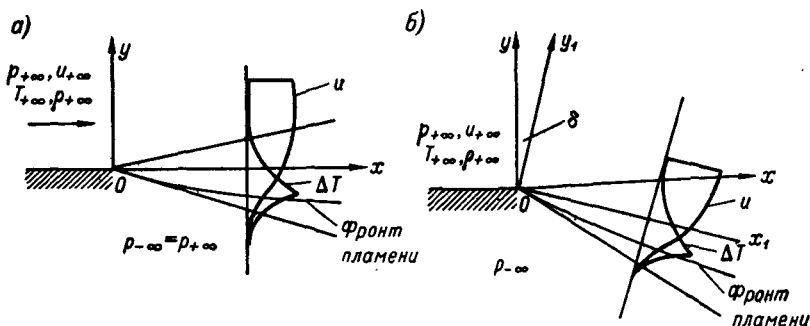


Рис. 8-1. Схема горения в плоскопараллельном пограничном слое высокоскоростного потока: а — при $\rho_{-\infty} = \rho_{+\infty}$; б — при $\rho_{-\infty} \neq \rho_{+\infty}$.

Аналогично решению при $M \ll 1$ (см. § 1-2) уравнения энергии и диффузии следует интегрировать отдельно для каждой области факела, а затем сомкнуть полученные решения на фронте пламени. В соответствии с этим систему уравнений (8-1) необходимо интегрировать при следующих граничных условиях:

на внешних границах пограничного слоя

$$u = 1, \quad i = i_{+\infty} = 1, \quad c_a = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = +\infty;$$

$$u = 0, \quad c_b = 1, \quad i = i_{-\infty} \quad \text{при } \eta = -\infty;$$

на фронте пламени

$$c_a = 0, \quad c_b = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_{\phi}.$$

К этим граничным условиям следует присоединить соотношение (1-7), определяющее местоположение фронта пламени, и уравнение баланса тепла, составленного для фронта горения. Последнее необходимо для определения температуры в зоне горения, которая в случае истечения высокоскоростной газовой струи будет зависеть как от теплотворности газа, так и от скорости набегающего потока (выделение тепла за счет диссипации энергии). Это уравнение записывается так:

$$q\rho_{\phi}D_{\phi}\left(\frac{\partial c_a}{\partial n}\right)_1 + \lambda_{\phi}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_1 = \lambda_{\phi}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_2.$$

Система уравнений (8-1) в предположении об автомодельности, т. е.

$$u = F'(\psi), \quad i = i(\psi), \quad c = c(\psi)$$

(где $\psi = \eta/2 \sqrt{\xi}$), может быть приведена к виду

$$\left. \begin{aligned} F'''(\psi) + 2F(\psi)F''(\psi) &= 0, \\ i''(\psi) + 2\text{Pr} F(\psi)i'(\psi) + \text{Pr}(k-1)M_{+\infty}^2[F'(\psi)]^2 &= 0, \\ c''(\psi) + 2\text{Sc} F(\psi)c'(\psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

Эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений следует интегрировать с учетом граничных условий: на внешних границах пограничного слоя

$$\left. \begin{aligned} F'(\psi) = 1, \quad i(\psi) = i_{+\infty} = 1, \quad c_a(\psi) = 1, \quad F''(\psi) = 0 \\ \text{при } \psi = +\infty, \\ F'(\psi) = 0, \quad i(\psi) = i_{-\infty}, \quad c_b(\psi) = 1 \quad \text{при } \psi = 0; \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

на фронте пламени при $\psi = \psi_{\phi}$

$$\left. \begin{aligned} i = i_{\phi}, \quad c_a = c_b = 0, \\ -\frac{\rho_{\phi}D_{\phi b}\left(\frac{\partial c_b}{\partial \psi}\right)_{\phi}}{\rho_{\phi}D_{\phi a}\left(\frac{\partial c_a}{\partial \psi}\right)_{\phi}} = \Omega, \\ q\rho_{\phi}D_{\phi}\left(\frac{\partial c_a}{\partial \psi}\right)_1 + \lambda_{\phi}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi}\right)_1 = \lambda_{\phi}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi}\right)_2. \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

Решение уравнения движения (в первом приближении) имеет вид (см. § 1-2)

$$\left. \begin{aligned} F(\psi) &= \frac{1}{2} \left[\psi + \int_0^{\psi} \text{erf}(z) dz + a_1 \right], \\ F'(\psi) &= \frac{1}{2} [1 + \text{erf}(\psi)]. \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

Уравнение энергии представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого может быть представлено так [Л. 22]:

$$i = -(k-1)M_{+\infty}^2 \int_0^\psi [F''(z)]^{Pr} \left\{ \int_0^z [F''(\epsilon)]^{2-Pr} d\epsilon \right\} dz + \\ + a_2 \int_0^\psi [F''(z)]^{Pr} dz + a_3. \quad (8-6)$$

Используя граничные условия, нетрудно найти постоянные a_2 и a_3 и тем самым определить распределение энтальпии во внешней и внутренней областях факела.

Постоянные интегрирования a_2 и a_3 с учетом граничных условий равны:

$$a_2 = \frac{(i_\phi - i_{\pm\infty}) + (k-1)M_{+\infty}^2 \Phi(\pm\infty)}{\int_{\pm\infty}^\phi [F''(z)]^{Pr} dz},$$

$$a_3 = i_{\pm\infty} + (k-1)M_{+\infty}^2 \int_0^{\pm\infty} [F''(z)]^{Pr} \left\{ \int_0^z [F''(\epsilon)]^{2-Pr} d\epsilon \right\} dz - \\ - [(i_\phi - i_{\pm\infty}) + (k-1)M_{+\infty}^2 \Phi(\pm\infty)] \frac{\int_0^{\pm\infty} [F''(z)]^{Pr} dz}{\int_{\pm\infty}^\phi [F''(z)]^{Pr} dz},$$

где

$$\Phi(\pm\infty) = \int_{\pm\infty}^\phi [F''(z)]^{Pr} \left\{ \int_0^z [F''(\epsilon)]^{2-Pr} d\epsilon \right\} dz.$$

Знак плюс указывает, что рассматривается внешняя область течения, минус — внутренняя.

Решение уравнения диффузии может быть представлено в виде

$$c = b_1 \int_0^\psi [F''(z)]^{Sc} dz + b_2.$$

С учетом граничных условий получим следующие выражения для распределения концентрации топлива и окислителя в поперечных сечениях пограничного слоя:

$$c_a = \frac{\int_{\psi\phi}^\psi [F''(z)]^{Sc} dz}{\int_{\psi\phi}^\psi [F''(z)]^{Sc} dz}, \quad (8-7)$$

$$c_\phi = \frac{\int_{\psi_\phi}^{\psi} [F''(z)]^{Sc} dz}{\int_{-\infty}^{\psi_\phi} [F''(z)]^{Sc} dz}. \quad (8-8)$$

Из уравнения (8-7) и (8-8) и условий (8-4) получим то же, что и для $M \ll 1$, выражение, определяющее местоположение фронта пламени:

$$\operatorname{erf}(\psi_\phi \sqrt{Sc}) = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \beta = \Omega \frac{c_{+\infty}}{c_{-\infty}}. \quad (8-9)$$

Для определения температуры в зоне горения запишем уравнение баланса тепла на фронте (8-4) с учетом соотношений (8-6) и (8-7):

$$\frac{qc_{a,+\infty} Le}{c_p T_{+\infty}} \cdot \frac{1}{\int_{\psi_\phi}^{+\infty} [F''(z)]^{Sc}} = a_2(-\infty) - a_2(+\infty), \quad (8-10)$$

где $Le = a/D$ — число Льюиса.

В частном случае $Le = 1$ выражение (8-10) с учетом соотношения (8-9) может быть существенно упрощено:

$$\bar{T}_\phi = \frac{T_\phi}{T_{+\infty}} = 1 + \frac{qc_{+\infty}}{c_p T_{+\infty}} \cdot \frac{1}{1+\beta} + \frac{k-1}{2} M_{+\infty}^2 \frac{\beta}{(1+\beta)^2}.$$

По известному (для данных условий) значению β могут быть определены температура торможения в зоне горения и значение числа Маха:

$$\frac{T_\phi^*}{T_{+\infty}^*} = \bar{T}_\phi + \frac{k-1}{2} \cdot \frac{1}{(1+\beta)^2} M_{+\infty}^2, \quad (8-11)$$

$$\frac{M_\phi^2}{M_{+\infty}^2} = \frac{1}{T_\phi} \cdot \frac{1}{(1+\beta)^2}. \quad (8-12)$$

Таким образом, задача аэродинамического расчета высокоскоростного факела при ламинарном режиме движения доведена до конца.

Для анализа влияния отдельных параметров процесса на аэродинамику горения следует трансформировать полученное решение в плоскость физических переменных x , y . Связь между безразмерными переменными $\psi = \eta/2 \sqrt{\xi}$ и $\varphi = y/2 \sqrt{x}$ определяется из соотношения $\varphi = \int_0^\psi i d\psi$.

Заметим, что рассмотренный выше метод расчета факела может быть использован и при решении задачи о горении газа при нерас-

четном режиме истечения (при $p_{+\infty} > p_{-\infty}$). В этом случае поток, обтекая кромку сопла (точка O на рис. 8-1), повернется на некоторый угол δ , величина которого определяется отношением $p_{+\infty}/p_{-\infty}$. Вследствие этого пограничный слой также сместится на угол δ . Поэтому решение следует проводить в новой (повернутой) системе координат x, y , выбирая в качестве начальных значений параметры газового потока после поворота. Последние определяются известными газодинамическими соотношениями (см., например, [Л. 3; 28]).

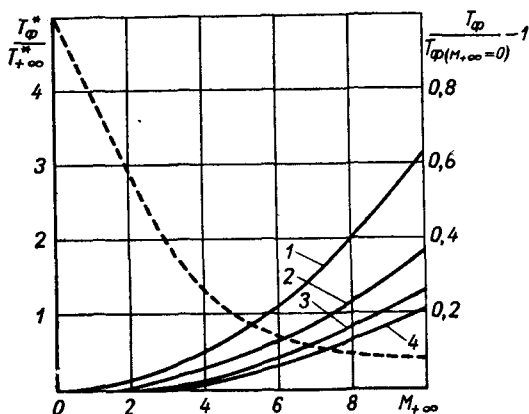


Рис. 8-2. Изменение термодинамической температуры и температуры торможения в поле горения в зависимости от числа M .

1 — при $c_{+\infty} = 0,25$ кг/кг; 2 — при $c_{+\infty} = 0,5$ кг/кг;
3 — при $c_{+\infty} = 0,75$ кг/кг; 4 — при $c_{+\infty} = 1$ кг/кг.
— — — температура торможения на фронте
 $T^*_\phi / T^*_{+\infty}$ ($c_{+\infty} = 0,25$ кг/кг, $q = 6 \cdot 10^8$ ккал/кг, $T_{\pm\infty} = 300^\circ \text{K}$).

Рассмотрим теперь на конкретном примере особенности аэродинамики высокоскоростного ламинарного диффузионного факела.

На рис. 8-2 показано изменение термодинамической температуры в зоне горения в зависимости от числа $M_{+\infty}$ для нескольких значений начальной концентрации топлива. Здесь же построена кривая отношения температуры торможения на фронте пламени к температуре торможения набегающего потока. Из графика видно, что по мере увеличения $M_{+\infty}$ термодинамическая температура в зоне горения возрастает. При этом увеличение ее оказывается более высоким при меньших значениях начальной концентрации топлива. Это связано с тем, что по мере уменьшения концентрации топлива в общем балансе увеличивается доля тепла, выделяющегося за счет диссипации энергии.

Характер распределения скорости и термодинамической тем-

пературы в поперечном сечении пограничного слоя показан на рис. 8-3. Из него видно, что изменение скорости истечения приводит к существенной перестройке аэродинамики факела — дефор-

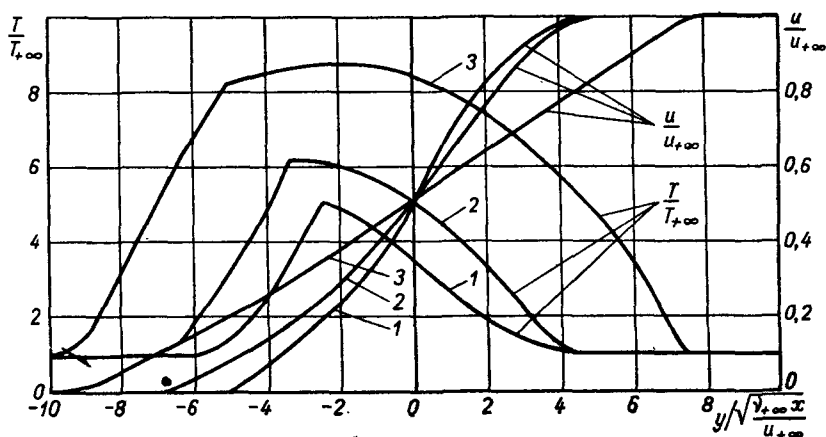


Рис. 8-3. Распределение скорости и термодинамической температуры в поперечном сечении ламинарного пограничного слоя.

1 — при $M_{+\infty} = 0$; 2 — при $M_{+\infty} = 5$; 3 — при $M_{+\infty} = 10$ ($q = 6 \cdot 10^3$ ккал/кг, $c_{+\infty} = 0,25$ кг/кг, $\Omega = 11$, $T_{\pm\infty} = 300^\circ \text{K}$).

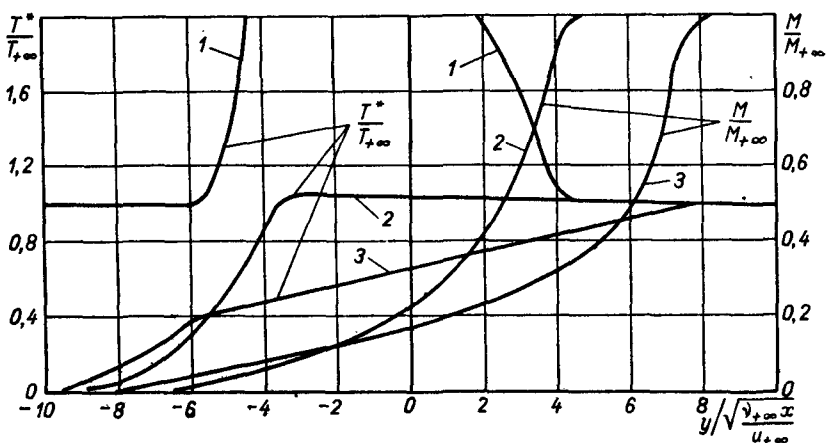


Рис. 8-4. Распределение температуры торможения и числа Маха в ламинарном пограничном слое.

1 — при $M_{+\infty} = 0$; 2 — при $M_{+\infty} = 5$; 3 — при $M_{+\infty} = 10$ ($q = 6 \cdot 10^3$ ккал/кг, $c_{+\infty} = 0,25$ кг/кг, $\Omega = 11$; $T_{\pm\infty} = 300^\circ \text{K}$).

мации профилей скорости и температуры. При увеличении значения $M_{+\infty}$ фронт пламени смещается к внешней границе пограничного слоя (аналогичный результат получается и при расчете турбулентного факела сжимаемого газа по методу ρu^2 — см. § 8-2).

Особенностью высокоскоростного факела является то, что при больших скоростях истечения термодинамическая температура может достигнуть максимального значения вне фронта пламени (см. рис. 8-3, кривая 3). Этот эффект также проявляется сильнее при горении низкокалорийных топлив.

На рис. 8-4 приведены данные по распределению температуры торможения и числа Маха в пограничном слое. Своеобразный характер распределения температуры торможения в поперечном сечении факела является следствием того, что по мере увеличения числа Маха влияние тепловыделения при горении играет все меньшую роль в балансе энергии скоростного потока.

8-2. Расчет турбулентного факела

Выполним теперь аналогичный предыдущему расчет для турбулентного высокоскоростного диффузионного факела. Для решения воспользуемся расчетом по методу подобия pu^2 .

Исходная система уравнений турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа может быть записана в виде [Л. 22]

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_{\tau} \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ U \frac{\partial \Delta i^*}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta i^*}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{\tau} \frac{\partial \Delta i^*}{\partial y} \right), \\ U \frac{\partial \Delta c}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta c}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{\tau} \frac{\partial \Delta c}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \quad \frac{p}{\rho} = RT. \end{aligned} \right\} \quad (8-13)$$

Эта система отличается от системы (6-1) тем, что в уравнении энергии стоит разность энтальпий торможения:

$$i^* = c_p T + \frac{u^2}{2}.$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи записываются в следующем виде:

для динамической задачи

$$\left. \begin{aligned} U &= U_{+\infty} \text{ при } y = +\infty, \\ U &= U_{-\infty} \text{ при } y = -\infty; \end{aligned} \right\} \quad (8-14)$$

для области топлива и продуктов сгорания

$$\left. \begin{aligned} i^* &= i^*_{+\infty}, \quad c_a = c_{a,+\infty} \text{ при } y = +\infty, \\ i^* &= i^*_f, \quad c_a = 0 \text{ при } y = y_f; \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

для области окислителя и продуктов сгорания

$$\left. \begin{aligned} i^* &= i_{-\infty}^*, & c_\phi &= c_{\phi, -\infty} & \text{при } y &= -\infty, \\ i^* &= i_\phi^*, & c_\phi &= 0 & \text{при } y &= y_\phi. \end{aligned} \right\} \quad (8-16)$$

Для автомодельного решения примем (при $c_p = \text{const}$):

$$\frac{U}{U_{+\infty}} = F'(\bar{\varphi}), \quad \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho_{+\infty}}} \cdot \frac{(T^* - T_\phi^*)}{(T_{+\infty}^* - T_\phi^*)} = \theta_1(\bar{\varphi}),$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho_{+\infty}}} \cdot \frac{(c - c_\phi)_a}{(c_{+\infty} - c_\phi)_a} = \pi_a(\bar{\varphi}),$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho_\phi}} \cdot \frac{(T^* - T_{-\infty}^*)}{(T_\phi^* - T_{-\infty}^*)} = \theta_2(\bar{\varphi}), \quad \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho_\phi}} \cdot \frac{(c - c_{-\infty})_\phi}{(c_\phi - c_{-\infty})_\phi} = \pi_\phi(\bar{\varphi}),$$

где $\bar{\varphi} = \varphi + \varphi_0$, $\varphi = y/ax$, $\varphi_0 = \text{const}$, а также

$$v_\tau = k_u U_{+\infty} x, \quad a_\tau = k_q U_{+\infty} x, \quad D_\tau = k_d U_{+\infty} x.$$

В результате приходим к той же, что и в § 6-1, системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6-5).

Поскольку уравнения и граничные условия для функций F , θ и π имеют тот же вид, что и в задаче для $M \ll 1$, тождественными будут также и решения для соответствующих величин. Отличие, как уже отмечалось, состоит в том, что в приведенные выше уравнения и решения везде входит энтальпия заторможенного газа $i^* = c_p T^*$ вместо $i = c_p T$ в случае $M \ll 1$.

Для расчета профилей скорости, термодинамической температуры, температуры торможения и концентраций необходимо знать местоположение фронта пламени и закон изменения плотности в поперечных сечениях пограничного слоя. Этот закон может быть определен из выражения для распределения температуры торможения путем алгебраических преобразований. Покажем это на примере для области топлива, для которой

$$\frac{T^* - T_\phi^*}{T_{+\infty}^* - T_\phi^*} = \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}} \theta_1(\bar{\varphi})$$

или

$$\frac{T_\alpha - T_{\phi\alpha\phi}}{T_{+\infty\alpha} - T_{\phi\alpha\phi}} = \theta_1(\bar{\varphi}) \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}}, \quad (8-17)$$

где

$$\alpha_i = 1 + \frac{k-1}{2} M_i^2, \quad M_i^2 = M_{+\infty}^2 [F'(\bar{\varphi})]^2. \quad (8-18)$$

С учетом уравнения состояния придадим выражению (8-17) вид

$$\frac{\rho_{+\infty}}{\rho} - \theta_1(\bar{\varphi}) \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}} \cdot \frac{\alpha_{+\infty} - \omega_1^2 \phi}{\alpha} - \omega_1 \frac{\alpha \phi}{\alpha} = 0,$$

откуда следует

$$\sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}} = \frac{1}{2} \left[\theta_1(\bar{\varphi}) \frac{\alpha_{+\infty} - \omega_1^2 \phi}{\alpha} + \right. \\ \left. + \sqrt{\theta_1^2(\bar{\varphi}) \left(\frac{\alpha_{+\infty} - \omega_1^2 \phi}{\alpha} \right)^2 + 4 \omega_1 \frac{\alpha \phi}{\alpha}} \right].$$

Аналогичным путем получим выражение для $\sqrt{\rho_{\phi}/\rho}$ для области окислителя:

$$\frac{\rho_{\phi}}{\rho} = \frac{1}{2} \left[\theta_2(\bar{\varphi}) \frac{\alpha_{\phi} \omega_{II} - 1}{\alpha \omega_{II}} + \sqrt{\theta_2^2(\bar{\varphi}) \left(\frac{\alpha_{\phi} \omega_{II} - 1}{\alpha \omega_{II}} \right)^2 + \frac{4}{\omega_{II}^2}} \right].$$

Перейдем теперь к определению местоположения фронта пламени. Для этого, используя обычное для диффузионного факела условие (6-4), получаем в окончательном виде равенство

$$\frac{2\omega_{II}}{(\alpha_{\phi} \omega_{II} + 1) \sqrt{\omega_I}} [1 - \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T})] \left\{ \frac{\alpha_{\phi}}{1 + \operatorname{erf}(\varphi_{\phi} \sqrt{\sigma_T})} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{\phi} - 1}{1 + \operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi})} \exp[-\bar{\varphi}_{\phi}^2 (1 - \sigma_T)] = \Omega \frac{c_{a, +\infty}}{c_{\phi, -\infty}} \right\} = \beta_1,$$

которое при $M \approx 0$ (когда $\alpha = 1$) принимает более простой вид:

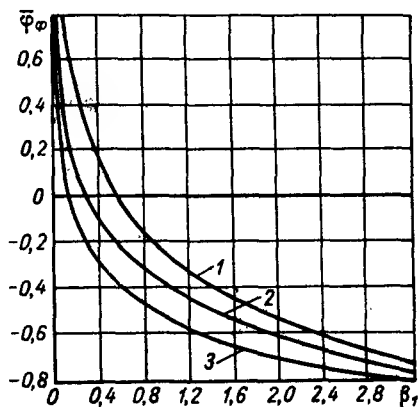
$$\operatorname{erf}(\bar{\varphi}_{\phi} \sqrt{\sigma_T}) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \beta = \Omega \frac{c_{a, +\infty}}{c_{\phi, -\infty}} \cdot \frac{\sqrt{\omega_I} (\omega_{II} + 1)}{2\omega_{II}}.$$

Из этого соотношения видно, что увеличение степени перегрева (т. е. повышение теплотворности топлива) приводит к смещению фронта пламени к внешней границе пограничного слоя. Аналогичный результат был получен ранее при решении задачи о горении в ламинарном пограничном слое. Качественное соответствие результатов расчета турбулентного факела, основанного на использовании расчетной схемы подобия ρu^2 , с решением физически строгих уравнений ламинарного движения подтверждает целесообразность применения этой схемы к расчету турбулентного факела.

Обратимся теперь к анализу влияния числа $M_{+\infty}$ на аэродинамику диффузионного факела. На рис. 8-5 показаны зависимости $\bar{\varphi}_{\phi} = f(\beta_1)$, рассчитанные для различных значений числа $M_{+\infty}$. Из этого графика видно, что характер зависимости координаты

фронта горения от стехиометрического комплекса β при различных значениях $M_{+\infty}$ остается одинаковым. Однако с увеличением скорости набегающего потока (при прочих равных условиях) фронт пламени смещается к внешней границе пограничного слоя. На рис. 8-6 приведены расчетные профили термодинамической температуры, температуры торможения, скорости и числа M в пограничном слое при наличии фронта пламени. Из графика видно, что изменение M при-

Рис. 8-5. Зависимость $\bar{\varphi}_\Phi = f(\beta_1)$ в турбулентном пограничном слое
1 — при $M_{+\infty} = 0$; 2 — при $M_{+\infty} = 5$;
3 — при $M_{+\infty} = 10$ ($\omega_1 = \omega_2 = 10$).



водит к заметной перестройке температурных и скоростных полей. Однако даже значительное изменение числа M не вызывает существенной деформации поля скорости. Качественное тол-

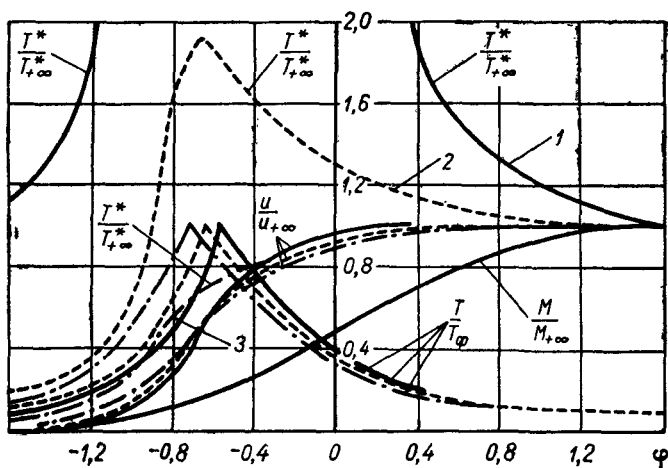


Рис. 8-6. Распределение скорости, числа M , термодинамической температуры и температуры торможения в турбулентном пограничном слое.

1 — при $M_{+\infty} = 0$; 2 — при $M_{+\infty} = 5$; 3 — при $M_{+\infty} = 10$ ($\omega = \omega_1 = 10$, $\beta_1 = 2.2$).

кование этих кривых остается тем же и для ламинарного факела. Сохраняется в принципе и возможность обобщения расчета на случай истечения газа с недорасширением.

ДИФфуЗИОННЫЙ ФАКЕЛ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

9-1. Расчет факела в магнитном поле

В последние годы в связи с развитием магнитной гидродинамики и, особенно, изысканиями в области магнитогидродинамического метода прямого преобразования тепловой энергии в электрическую возрос интерес к изучению электрофизических свойств пламени [Л. 56; 62; 64 и др.] и взаимодействия его с электрическим и магнитным полями [Л. 9; 37; 104]. Исследования проводимости пла-

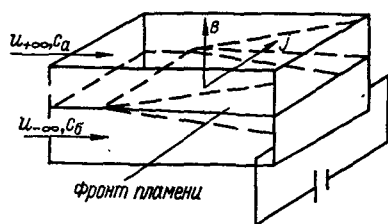


Рис. 9-1. Схема зоны горения в скрещенном магнитном и электрическом поле.

мени, представляющего собой низкотемпературную плазму, связаны с выбором рабочего тела для магнитогидродинамического преобразователя энергии, работающего по открытому циклу. Наряду с этим измерение ионизации используется в качестве метода диагностики турбулентного пламени [Л. 17; 78]. В свою очередь, исследование нагрева продуктов сгорания с помощью электрического тока интересно для получения потока высокой температуры.

Наконец, в перспективе могут, по-видимому, представить известный интерес методы активного воздействия с помощью электрического и магнитного полей на аэродинамику и тепловой режим факела. Некоторые примеры влияния поля на горение приведены в работах [Л. 9; 37 и др.], содержащих экспериментальные данные. Последние свидетельствуют о возможности в принципе практического использования электромагнитных методов управления факелом. В связи с этим, используя развитые выше методы, рассмотрим газовый факел, помещенный в электромагнитное поле, при одном из двух предположений:

1) внешнее электрическое поле отсутствует ($E = 0$), что соответствует «короткому замыканию» по оси z ;

2) $E \gg uB$ — приложенное внешнее электрическое поле значительно сильнее индуцированного (рис. 9-1).

Следуя работе [Л. 106], рассмотрим для $E = 0$ особенности развития ламинарного диффузионного факела при наложении поперечного магнитного поля. Ограничимся при этом простейшей автомодельной задачей. Рассмотрим зону смещения и горения (рис. 9-2), образующуюся в свободном пограничном слое между двумя неограниченными параллельными спутными потоками топлива и окислителя, движущимися с различными скоростями ($u_{-\infty}$ и $u_{+\infty}$).

В результате горения резко возрастают температура и электропроводность газа. Происходящее при этом течение проводящего реагирующего газа может быть описано уравнениями пограничного слоя с учетом конечной скорости горения и взаимодействия с магнитным полем:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sigma u B, \\ \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \sigma u^2 B^2 + q W(c, T), \\ \rho u \frac{\partial c}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial y} \right) - W(c, T), \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

где в дополнение к принятым ранее обозначениям σ — удельная электропроводность; B — магнитная индукция. К системе уравнений (9-1) необходимо присоединить уравнение состояния и уравнение, связывающее электропроводность газа с температурой заряженных частиц.

В такой весьма общей постановке аналитическое решение задачи в настоящее время вряд ли возможно. Можно, однако, используя методы аэродинамической теории газового факела, осуществить приближенный расчет течения.

При напряженном горении вследствие экспоненциальной зависимости скорости реакции от температуры зона реакции локализуется в сравнительно узкой области пограничного слоя. Поскольку проводимость газа также является экспоненциальной функцией температуры, а степень ионизации в пламени существенно превышает степень ионизации продуктов сгорания, в пограничном слое можно условно выделить некоторую весьма узкую эффективную высокотемпературную зону (область активного реагирования исходных компонентов), внутри которой газ можно считать проводящим. Вне этой области — во всем поле течения — проводимостью топлива, окислителя и продуктов сгорания можно пренебречь. Так как ширина эффективной зоны полагается малой (магнитное число Рейнольдса $Re_m \ll 1$), можно пренебречь изменением напряженности магнитного поля по сечению

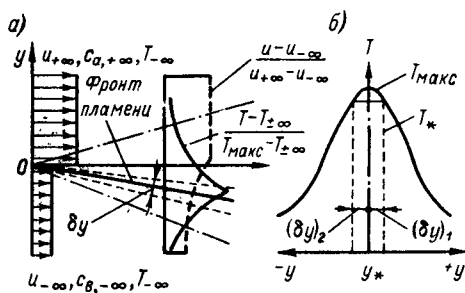


Рис. 9-2. Схема распределения скорости и температуры при горении и наличии поперечного магнитного поля.

выделенной зоны и считать магнитную индукцию ($B \equiv B_y$) заданной.

Введение узкой зоны взаимодействия малой, но конечной толщины взамен поверхности фронта пламени связано с учетом объемной электромагнитной силы. При наличии этой силы предельная схематизация зоны горения и сведение ее к поверхности фронта пламени лишают задачу физического содержания.

Принятая схема позволяет, как и в предыдущих случаях, свести решение к интегрированию системы уравнений пограничного слоя без источников, т. е. к задаче о распространении неизотермической струи при заданных на границах эффективной зоны значениях температуры и скорости. Для определения последних необходимо задать дополнительные условия, в качестве которых могут быть использованы уравнения баланса сил и энергии, составленные для выделенной зоны. При этом решение гидродинамической, тепловой и диффузионной задач проводится раздельно для области топлива и окислителя. Затем при помощи дополнительных условий полученные решения смыкаются на границах выделенной зоны.

В указанной выше постановке задачи граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 x \leq 0 & \left\{ \begin{array}{lll} u = u_{+\infty}, & v = 0, & c_a = c_{+\infty} \quad \text{при } y \geq 0, \\ u = u_{-\infty}, & v = 0, & c_b = c_{-\infty} \quad \text{при } y \leq 0; \end{array} \right. \\
 x > 0 & \left\{ \begin{array}{lll} u = u_{+\infty}, & T = T_{+\infty}, & c = c_{a,+\infty} \quad \text{при } y = +\infty, \\ u = u_*, & T = T_*, & c_{ab} = c_* \approx 0 \quad \text{при } y = \begin{cases} y_{*1}, \\ y_{*2}, \end{cases} \\ u = u_{-\infty}, & T = T_{-\infty}, & c = c_{b,-\infty} \quad \text{при } y = -\infty. \end{array} \right. \quad (9-2)
 \end{aligned}$$

Кроме того, для эффективной зоны следует положить

$$\mu_* \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{*1} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{*2} \right] = \sigma_* u_* B^2 (\delta y), \quad (9-3)$$

а также

$$q\rho_* D_* \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{*1} + \sigma_* B^2 u_*^2 (\delta y) = \lambda \left[\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*1} + \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*1} \right]. \quad (9-4)$$

К этим условиям следует добавить общее для диффузионного горения стехиометрическое соотношение (1-7) для диффузионных потоков топлива и окислителя, притекающих с обеих сторон к границам активной зоны. Для краткости запишем его только после приведения уравнений и граничных условий к автомодельной форме [см. равенство (9-14)]. В равенствах (9-3) и (9-4) обозначено: δy — ширина эффективной зоны, u_* , T_* , c_* — значения скорости, температуры и концентрации на границах выделенной зоны. Индексы 1 и 2 указывают, что значения производных берутся на одной из границ зоны. Для оценки ее ширины необходимо выбрать характерную температуру T_* так, чтобы зона активной реакции была за-

ключена внутри слоя δy . В первом приближении значение T_* может быть принято равным температуре потухания. Последняя по порядку величина, согласно работе [Л. 47], определяется соотношением

$$T_{\text{макс}} - T_* \approx \frac{RT_{\text{макс}}^2}{E_A}, \quad (9-5)$$

где $T_{\text{макс}}$ — максимальное значение температуры в зоне горения, E_A — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.

Обозначая $T_{\text{макс}}/T_* = 1 + \varepsilon$ и пренебрегая членами, содержащими ε^2 , получаем

$$\varepsilon = \frac{\bar{T}_* \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_*}, \quad \bar{T}_* = \frac{\bar{T}_*}{T_{+\infty}}, \quad \theta = \frac{RT_{+\infty}}{E_A}. \quad (9-6)$$

Используя очевидные геометрические соотношения (см. рис. 9-1):

$$\delta y = (\delta y)_1 + (\delta y)_2, \quad \frac{T_{\text{макс}} - T_*}{(\delta y)_1} \approx \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*1}, \quad \frac{T_{\text{макс}} - T_*}{(\delta y)_2} \approx \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*2}$$

и выражение (9-6), имеем

$$\left. \begin{aligned} (\delta y)_1 &= \frac{\bar{T}_*^2 \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_*} \cdot \frac{T_{+\infty}}{\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*1}}, \\ (\delta y)_2 &= \frac{\bar{T}_*^2 \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_*} \cdot \frac{T_{+\infty}}{\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*2}}, \\ \delta y &= \frac{\bar{T}_*^2 \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_*} T_{+\infty} \left[\frac{1}{\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*1}} + \frac{1}{\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{*2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

Подставляя в равенства (9-3) и (9-4) выражение δy из (9-7), получаем два уравнения, содержащих неизвестные u_* и T_* , и замыкаем тем самым систему уравнений.

В дальнейшем будем полагать вязкость линейной функцией температуры. Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{2u}{u_{+\infty} + u_{-\infty}}, \quad v = \frac{2v}{u_{+\infty} + u_{-\infty}} \times \\ &\times \sqrt{\text{Re} \frac{1+m}{2}}, \quad y = \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re} \frac{1+m}{2}}, \\ \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \Delta \bar{T}_{\pm\infty} = \frac{T - T_{\pm\infty}}{T_* - T_{\pm\infty}}, \quad \Delta c_{a,b} = \left(\frac{c - c_{\pm\infty}}{c_* - c_{\pm\infty}} \right)_{a,b}, \\ m &= \frac{u_{-\infty}}{u_{+\infty}}; \quad \text{Re} = \frac{u_{+\infty} L}{\nu_{+\infty}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{+\infty}}, \end{aligned}$$

где L — некоторый характерный размер.

Обозначая $\bar{\xi} = x$ и $\bar{\eta} = \int_0^{\bar{y}} \bar{\rho} d\bar{y}$, получаем систему уравнений свободного пограничного слоя в переменных А. А. Дородницына [Л. 38] в том же виде, что и в § 1-2:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\eta}^2}, \quad u \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}^2}, \\ \bar{u} \frac{\partial \Delta \bar{c}}{\partial \bar{\xi}} + \bar{v} \frac{\partial \Delta \bar{c}}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{1}{\text{Sc}} \cdot \frac{\partial^2 \Delta \bar{c}}{\partial \bar{\eta}^2}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\eta}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

Граничные условия в новых переменных имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} \leq 0 \quad & \left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{2}{1+m}, \quad \bar{v} = 0, \quad \Delta \bar{T}_{+\infty} = 0, \quad \Delta \bar{c}_a = 0 \quad \text{при } \bar{\eta} \geq 0, \\ \bar{u} &= \frac{2m}{1+m}, \quad \bar{v} = 0, \quad \Delta \bar{T}_{-\infty} = 0, \quad \Delta \bar{c}_o = 0 \quad \text{при } \bar{\eta} \leq 0; \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{2}{1+m}, \quad \Delta \bar{T}_{+\infty} = 0, \quad \Delta \bar{c}_a = 1 \quad \text{при } \bar{\eta} = +\infty, \\ \bar{u} &= \frac{2}{1+m} \cdot \frac{u_*}{u_{+\infty}}, \quad \Delta \bar{T}_{\pm\infty} = 1, \quad \Delta c_{a, o} = 0 \end{aligned} \right. \\ & \quad \text{при } \bar{\eta} = \begin{cases} \bar{\eta}_{*1}, \\ \bar{\eta}_{*2}, \end{cases} \\ \bar{u} &= \frac{2m}{1+m}, \quad \Delta \bar{T}_{-\infty} = 0, \quad \Delta \bar{c}_o = 1 \quad \text{при } \bar{\eta} = -\infty, \\ \mu_* \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \right)_{*1} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \right)_{*2} \right] &= \frac{4u_* \sigma_* B^2 L^2}{u_{+\infty} \bar{\rho}_*^2 \text{Re} (1+m)^2} \times \\ & \times \frac{\bar{T}_*^2 \theta}{(1 - 2\bar{T}_* \theta) (\bar{T}_* - 1)} \cdot \left[\frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*1}} + \frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*2}} \right], \\ \bar{\xi} > 0 \quad & \left\{ \begin{aligned} \left| \frac{\partial \Delta \bar{c}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*1} &+ \frac{2\sigma_* B^2 L^2}{q \rho_* D_* c_{+\infty}} \bar{u}_*^2 u_{+\infty}^2 \frac{\bar{T}_*^2 \theta}{1 - 2\bar{T}_* \theta} \times \\ & \times \frac{1}{\text{Re} (1+m) \bar{\rho}_*^2 (T_* - 1)} \times \\ & \times \left[\frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*1}} + \frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*2}} \right] = \frac{\lambda_* T_{+\infty}}{\rho_* D_* q c_{+\infty}} \times \\ & \times (T_* - 1) \left[\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*1} + \left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{*2} \right]. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

Полагая $\bar{u} = F'(\psi)$, $\Delta\bar{T} = \Theta(\psi)$, $\Delta\bar{c} = \pi(\psi)$, $\psi = \bar{\eta}/\sqrt{\bar{\xi}}$, получаем, как и в § 1-2, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} F'''(\psi) + \frac{1}{2} F(\psi) F''(\psi) &= 0, \\ \Theta''(\psi) + \frac{1}{2} \text{Pr} F(\psi) \Theta'(\psi) &= 0, \\ \pi''(\psi) + \frac{1}{2} \text{Sc} F(\psi) \pi'(\psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-10)$$

Систему уравнений (9-10) следует интегрировать при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} F'(\psi) &= \frac{2}{1+m}, \quad \Theta_{+\infty}(\psi) = 0, \quad \pi_a(\psi) = 1 \quad \text{при } \psi = +\infty, \\ F'(\psi) &= \frac{2}{1+m} \cdot \frac{u_*}{u_{+\infty}}, \quad \Theta_{\pm\infty}(\psi) = 1, \quad \pi_{a,b}(\psi) = 0 \\ &\quad \text{при } \psi = \begin{cases} \psi_{*1}, \\ \psi_{*2}, \end{cases} \\ F'(\psi) &= \frac{2m}{1+m}, \quad \Theta_{-\infty}(\psi) = 0, \quad \pi_b(\psi) = 1 \quad \text{при } \psi = -\infty. \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

Дополнительные условия, определяющие u_* и T_* , для активной зоны имеют вид

$$\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \psi} \right)_{*1} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \psi} \right)_{*2} \right] = \frac{u_*}{u_{+\infty}} \cdot \frac{4\sigma_* B^2 L^2 \bar{\xi}}{\rho_{**}^2 \text{Re} (1+m)^2} \times \\ \times \frac{\bar{T}^{2\theta}}{1-2\bar{T}_*\theta} \cdot \frac{1}{\bar{T}_*-1} \left[\frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \psi} \right|_{*1}} + \frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \psi} \right|_{*2}} \right], \quad (9-12)$$

$$\left| \frac{\partial \Delta \bar{c}}{\partial \psi} \right|_{*1} + \frac{2\sigma_* B^2 L^2 \bar{\xi}}{D_* \rho_* q c_{+\infty}} \bar{u}_*^2 u_{+\infty}^2 \cdot \frac{\bar{T}^{2\theta}}{1-2\bar{T}_*\theta} \cdot \frac{1}{\bar{T}_*-1} \times \\ \times \frac{1}{\text{Re} (1+m) \bar{\rho}^2} \cdot \left[\frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \psi} \right|_{*1}} + \frac{1}{\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \psi} \right|_{*2}} \right] = \\ = \frac{\lambda_*}{\rho_* D_* q c_{+\infty}} T_{+\infty} (\bar{T}_* - 1) \left[\left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \psi} \right|_{*1} + \left| \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \psi} \right|_{*2} \right]. \quad (9-13)$$

Наконец, согласно условию (1-7), запишем для отношения диффузионных потоков на границах активной зоны выражение

$$-\frac{\rho_* D_{*5} \left(\frac{dc}{d\psi} \right)_{*62}}{\rho_* D_{*a} \left(\frac{dc}{d\psi} \right)_{*a1}} = \Omega, \quad (9-14)$$

в котором, как в других случаях, заменена приближенно производная по нормали к границе $\partial/\partial n$ производной $d/d\psi$.

Первое приближение в решении системы уравнений (9-10) при указанных граничных условиях имеет вид:

для области $\psi_{*1} \leq \psi < +\infty$

$$\frac{u}{u_{+\infty}} = 1 - \left(1 - \frac{u_*}{u_{+\infty}} \right) \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi)}{1 - \operatorname{erf}(\psi_{*1})}, \quad (9-15)$$

$$\frac{T - T_{+\infty}}{T_* - T_{+\infty}} = \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})}{1 - \operatorname{erf}(\psi_{*1} \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad (9-16)$$

$$\left(\frac{c - c_*}{c_{+\infty} - c_*} \right)_a = 1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Sc}})}{1 - \operatorname{erf}(\psi_{*1} \sqrt{\operatorname{Sc}})}; \quad (9-17)$$

для области $-\infty < \psi < \psi_{*2}$

$$\frac{u}{u_{+\infty}} = m - \left(m - \frac{u_*}{u_{+\infty}} \right) \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi)}{1 + \operatorname{erf}(\psi_{*2})}, \quad (9-18)$$

$$\frac{T - T_{-\infty}}{T_* - T_{-\infty}} = \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_{*2} \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad (9-19)$$

$$\left(\frac{c - c_*}{c_{+\infty} - c_*} \right)_b = 1 - \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Sc}})}{1 + \operatorname{erf}(\psi_{*2} \sqrt{\operatorname{Sc}})}. \quad (9-20)$$

Используя эти выражения, преобразуем уравнения (9-12) и (9-13). Так как толщина эффективной зоны δy мала по сравнению с шириной области смещения, то приближенно можно принять

$$\operatorname{erf}(\psi_{*1} \sqrt{\operatorname{Pr}}) = \operatorname{erf}(\psi_{*2} \sqrt{\operatorname{Pr}}) = \operatorname{erf}(\psi_* \sqrt{\operatorname{Pr}})$$

и

$$[\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})_{*1}]' = [\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})_{*2}]' = [\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})_*]'$$

Примем также $T_{+\infty} = T_{-\infty}$. Из уравнений (9-12) и (9-13) видно, что для получения автомодельного решения необходимо положить $B = B_0 / \sqrt{\xi}$. В этом случае температура и скорость на границах эффективной зоны будут функциями только одной обобщенной

координаты ψ . Опуская промежуточные выкладки, приводим уравнения (9-12) и (9-14) в окончательном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{u_*}{u_{+\infty}} = \frac{1}{2} \times \\ & \times \frac{(1+m) + (1-m) \operatorname{erf}(\psi_*)}{1 + \left\{ \frac{1 - \operatorname{erf}^2(\psi_*)}{[\operatorname{erf}(\psi_*)]' [\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})]'} \cdot \frac{\bar{T}_*^3 \theta}{(\bar{T}_* - 1)(1 - 2\bar{T}_* \theta)} \cdot \frac{2}{1+m} N \right\}} \quad (9-21) \\ & \frac{\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Sc}})'}{1 - \operatorname{erf}(\psi_* \sqrt{\operatorname{Sc}})} + NS \frac{2 \operatorname{Sc}}{[\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})_*]'} \cdot \frac{\bar{T}_*^3}{\bar{T}_* - 1} \cdot \frac{\theta}{1 - 2\bar{T}_* \theta} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+m) + (1-m) \operatorname{erf}(\psi_*)}{1 + \frac{1 - \operatorname{erf}^2(\psi_*)}{[\operatorname{erf}(\psi)]' [\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})_*]'} \cdot \frac{\bar{T}_*^3}{\bar{T}_* - 1} \cdot \frac{\theta}{1 - 2\bar{T}_* \theta} \cdot \frac{2}{1+m} N} \right\}^2 = \\ & = \frac{\operatorname{Sc}}{\operatorname{Pr}} Q (\bar{T}_* - 1) \frac{2 [\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})_*]'}{1 - [\operatorname{erf}(\psi_* \sqrt{\operatorname{Pr}})]^2}, \quad (9-22) \\ & \operatorname{erf}(\psi_* \sqrt{\operatorname{Sc}}) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \quad (9-23) \end{aligned}$$

Из соотношений (9-21) и (9-22) видно, что значения скорости и температуры в эффективной зоне, как и во всем поле течения, определяются следующими безразмерными параметрами:

$$N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho_{+\infty} u_{+\infty}}, \quad S = \frac{\rho_{+\infty} u_{+\infty}^2}{\rho_{+\infty} q c_{+\infty}}, \quad Q = \frac{c_p T_{+\infty}}{q c_{+\infty}},$$

$$\beta = \Omega \frac{c_{a, +\infty}}{c_{b, -\infty}} \cdot \frac{D_a}{D_b},$$

а также числами Прандтля и Шмидта. В частности, при увеличении параметра взаимодействия N скорость в зоне горения будет монотонно убывать, в то время как зависимость $\bar{T}^* = f(N)$ будет иметь экстремальный характер. Последнее связано с тем, что выделение тепла за счет джоулевой диссипации будет равно нулю в двух предельных случаях (при $N = 0$ и $N = \infty$).

При горении высококалорийных смесей членом, учитывающим джоулево тепло в уравнении (9-22), можно пренебречь. В этом случае температура в зоне горения определяется в основном теплотворностью топлива и практически не зависит от магнитной индукции. Совместное решение системы уравнений (9-21) — (9-23) дает возможность определить для заданных условий значения температуры и скорости в зоне горения и местоположение последней.

Соотношения, определяющие характерные размеры эффективной зоны в плоскости переменных Дородницына, могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta\psi_1 &= \frac{\bar{T}_\Phi^2 \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_\Phi} \cdot \frac{1}{\bar{T}_\Phi - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})}{[\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})]'_\Phi}, \\ \delta\psi_2 &= \frac{\bar{T}_\Phi^2 \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_\Phi} \cdot \frac{1}{\bar{T}_\Phi - 1} \cdot \frac{1 + \operatorname{erf}(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})}{[\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})]'_\Phi}, \\ \delta\psi &= \frac{\bar{T}_\Phi^2 \theta}{1 - 2\theta \bar{T}_\Phi} \cdot \frac{1}{\bar{T}_\Phi - 1} \cdot \frac{2}{[\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})]'_\Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (9-24)$$

Для анализа влияния отдельных параметров на профили скорости и температуры необходимо вернуться к плоскости физических переменных. Для изобарического течения связь между переменными определяется соотношением

$$\bar{\xi} = \bar{x}, \quad y = \int_0^{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{\bar{\rho}} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\bar{\eta}}{V\bar{\xi}} = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\bar{\rho}(\psi)}.$$

Так как профили плотности внутри эффективной зоны и по обе стороны от нее описываются различными выражениями, то в зависимости от знака величины ψ_* уравнения, связывающие координаты ψ и φ , будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\bar{\rho}_I(\psi)} \quad \text{при } \psi_{*1} < \psi \leq +\infty, \\ \varphi_\Phi &= \varphi_I + \frac{\psi_{*2} - \psi_{*1}}{\bar{\rho}_\Phi} \quad \text{при } \psi_{*2} \leq \psi \leq \psi_{*1}, \\ \varphi_{II} &= \varphi_\Phi + \int_{\psi_{*1}}^{\psi} \frac{d\psi}{\bar{\rho}_{II}(\psi)} \quad \text{при } -\infty < \psi \leq \psi_{*2} \end{aligned} \right\} \quad \psi_* < 0;$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_{II} + \int_{\psi_{*1}}^{\psi} \frac{d\psi}{\bar{\rho}_I(\psi)} \quad \text{при } \psi_{*1} \leq \psi < +\infty, \\ \varphi_\Phi &= \frac{\psi_{*1} - \psi_{*2}}{\bar{\rho}_\Phi} \quad \text{при } \psi_{*1} \leq \psi \leq \psi_{*2}, \\ \varphi_{II} &= \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\bar{\rho}_{II}(\psi)} \quad \text{при } -\infty < \psi \leq \psi_{*2}, \end{aligned} \right\} \quad \psi_* > 0.$$

Здесь $\overline{\rho_I(\psi)}$, $\overline{\rho_{II}(\psi)}$ — профили плотности для областей топлива и окислителя, определяемые соответственно выражениями (9-16) и (9-19), а $\overline{\rho_\phi} \approx 2/(T_\phi + T_{\text{макс}}) = \text{const}$; индексы 1, 2 и «ф» относятся соответственно к области топлива, окислителя и активной зоне.

Для количественной оценки влияния магнитного поля на аэродинамику факела приведем расчет пограничного поля для трех значений параметра взаимодействия $N = 0; 0,2$ и $0,8$ и следующих условий:¹

$$T_{+\infty} = 300^\circ \text{K}, \quad q = 10^4 \text{ ккал/кг}, \quad \Omega = 3,5 \text{ (по } \text{O}_2\text{)},$$

$$E_A = 6 \cdot 10^4 \text{ ккал/моль}, \quad c_{a,+\infty} = 0,263 \text{ кг/кг}, \quad c_{b,-\infty} = 0,23 \text{ кг/кг},$$

$$\text{Pr} = \text{Sc} = 1, \quad D_a = D_b, \quad u_{+\infty} = 1 \text{ м/сек}, \quad \rho_{+\infty} = 1,25 \text{ кг/м}^3,$$

$$m = 0,6, \quad \sigma = 1 \text{ мо/м}.$$

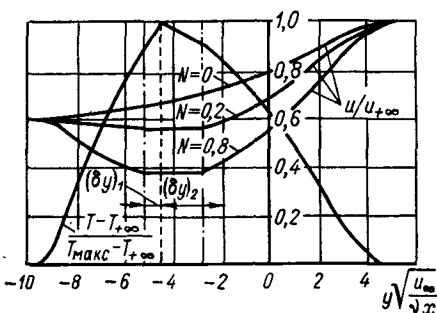


Рис. 9-3. Распределение скорости и температуры в пограничном слое факела при наличии поперечного магнитного поля.

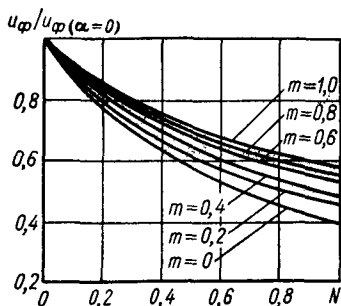


Рис. 9-4. Зависимость скорости в зоне горения от параметра взаимодействия N .

Результаты расчета распределения скорости и температуры в пограничном слое приведены на рис. 9-3. Наглядное представление о влиянии магнитного поля на аэродинамику факела дает рис. 9-4, на котором изображена зависимость отношения значения скорости в зоне горения (при наличии магнитного поля) к значению ее в этой зоне при отсутствии поля от параметра N .

Приведем также некоторые данные, характеризующие геометрические и режимные характеристики эффективной зоны. Толщина эффективного магнитогидродинамического слоя на расстоянии 1 м от точки слияния потоков равна 4,5 мм. Максимальная температура $T_{\text{макс}} = 2600^\circ \text{K}$, а температура на границе зоны $T_* = 2400^\circ \text{K}$ ($\varepsilon = 0,095$). Локальное значение магнитного числа Рейнольдса (при значении $N = 0,8$) равно

$$\text{Re}_m = \frac{(\delta y) u_*}{\nu_{\text{макс}}} = 1,7 \cdot 10^{-10}.$$

¹ Для данных условий джоулевым теплом можно пренебречь.

Из приведенных данных видно, что даже при умеренных величинах напряженности магнитного поля и при относительно низких значениях удельной электропроводности, принятых в расчетах, влияние магнитного поля на аэродинамику факела существенно.

Аналогичным путем можно рассмотреть ряд задач о горении факела при наличии магнитного и электрического полей. В частности, в следующем параграфе рассмотрим влияние на факел скрещенных полей.

Пользуясь той же моделью эффективной активной зоны, можно выполнить приближенный расчет влияния магнитного поля на аэродинамику турбулентного газового факела. Как и в обычной газодинамике, для решения необходимо с помощью полуэмпирической теории связать коэффициенты турбулентного обмена с осредненными параметрами течения. Замкнутая таким путем система уравнений пограничного слоя с учетом дополнительных условий для эффективной зоны может быть решена теми же методами, что и в предыдущих главах.

9-2. Расчет факела в скрещенных полях

Сильное воздействие на пламя могут оказать скрещенные электрическое и магнитное поля. Схематически такое течение показано на рис. 9-1.

Расчет течения для случая $E \gg uB$ и, следовательно, $j = \sigma E$ может быть выполнен аналогично предыдущему.

Для автомодельного решения, помимо задания зависимости магнитного поля от координаты x в виде $B = B_0 / \sqrt{x}$, следует принять также и для электрического поля $E = E_0 / \sqrt{x}$. При этом как исходные уравнения, так и уравнения в переменных Дородницына остаются теми же, что и в предыдущей задаче. Иной вид примут только уравнения баланса сил и тепла для эффективной зоны:

$$\mu_\Phi \left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Phi_1} - \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Phi_2} \right] = \sigma E B (\sigma y), \quad (9-25)$$

$$q_{\rho\Phi} D_\Phi \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{\Phi_1} + \sigma E^2 (\delta y) = \lambda \left[\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\Phi_1} + \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\Phi_2} \right], \quad (9-26)$$

тогда как граничные условия не изменятся. Сохранятся теми же выражения для безразмерных профилей скорости, температуры и концентраций в областях по обе стороны от эффективной зоны взаимодействия. Из этих выражений с учетом равенств (9-7) — (9-15) и (9-20) можно получить выражения, определяющие значения скорости и температуры внутри зоны взаимодействия:

$$\frac{u_\Phi}{u_{+\infty}} = 0,5 \left\{ (1+m) \left[1 + \operatorname{erf}(\psi_\Phi) \frac{1-m}{1+m} \right] + \frac{1 - \operatorname{erf}^2(\psi_\Phi)}{[\operatorname{erf}(\psi)]'_\Phi \operatorname{erf}[(\psi_\Phi \sqrt{\operatorname{Pr}})]'_\Phi} \cdot \frac{\bar{T}_0^3}{(1 - 2\bar{T}_{\Phi 0})(\bar{T}_\Phi - 1)} \cdot \frac{4}{1+m} N_1 \right\}, \quad (9-27)$$

$$\frac{[\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Sc}})]'_{\phi}}{1 - \operatorname{erf}(\psi_{\phi} \sqrt{\operatorname{Sc}})} + \kappa \operatorname{Sc} \frac{2}{[\operatorname{erf}(\psi)]'_{\phi}} \cdot \frac{\bar{T}_{\phi}^3 \theta}{(1 - 2\bar{T}_{\phi} \theta)(\bar{T}_{\phi} - 1)} =$$

$$= \frac{\operatorname{Sc}}{\operatorname{Pr}} Q (\bar{T}_{\phi} - 1) \frac{2 [\operatorname{erf}(\psi \sqrt{\operatorname{Pr}})]'_{\phi}}{1 - \operatorname{erf}^2(\psi_{\phi} \sqrt{\operatorname{Pr}})}, \quad (9-28)$$

причем безразмерные параметры N_1 , κ , Q определяются формулами:

$$N_1 = \frac{\sigma E_0 B_0 L}{\rho_{+\infty} u_{+\infty}^2}, \quad \kappa = \frac{\sigma E_0^2 L}{\rho_{+\infty} u_{+\infty} q c_{+\infty}}, \quad Q = \frac{c_p T_{+\infty}}{q c_{+\infty}}.$$

Первый из них характеризует отношение объемной электромагнитной силы к динамическому давлению, второй — отношение джоулева тепла к плотности потока химической энтальпии, а третий — отношение энтальпии единицы массы газа к химической

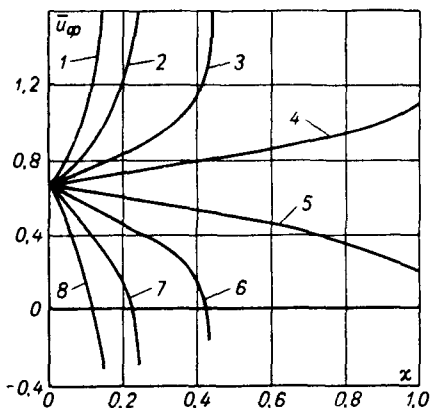


Рис. 9-5. Зависимость скорости в зоне горения от напряженности электрического поля.

1 — при $q = 10^4$ ккал/кг; 2 — при $q = 0,8 \cdot 10^4$ ккал/кг; 3 — при $q = 0,6 \cdot 10^4$ ккал/кг; 4 — при $q = 0,4 \cdot 10^4$ ккал/кг; 5 — при $q = 0,4 \cdot 10^4$ ккал/кг; 6 — при $q = 0,6 \cdot 10^4$ ккал/кг; 7 — при $q = 0,8 \cdot 10^4$ ккал/кг; 8 — при $q = 10^4$ ккал/кг.

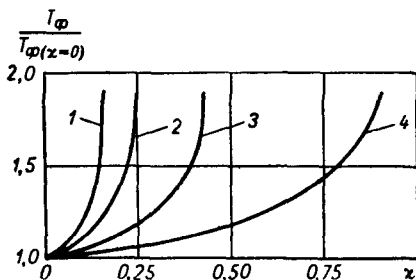


Рис. 9-6. Изменение температуры в зоне горения в зависимости от напряженности электрического поля.

1 — при $q = 10^4$ ккал/кг; 2 — при $q = 0,8$ ккал/кг; 3 — при $q = 0,6$ ккал/кг; 4 — при $q = 0,4$ ккал/кг.

энтальпии. Эти три параметра N_1 , κ , Q определяют значения температуры и скорости в зоне горения. В зависимости от приложенного электрического поля параметр N_1 может принимать положительное или отрицательное значение, так что возможно как ускорение, так и торможение газа в зоне взаимодействия с полем. Торможение факела привело бы, по-видимому, к резкому сокращению его длины.

Результаты расчета скорости в эффективной зоне в зависимости от напряженности электрического поля представлены на рис. 9-5. На нем нанесена серия кривых $\bar{u}_{\phi} = f(x)$, рассчитанных для различных значений теплотворности газа. Зависимость температуры в зоне горения от напряженности электрического поля приведена на рис. 9-6. На рис. 9-7 показано распределение скорости и темпе-

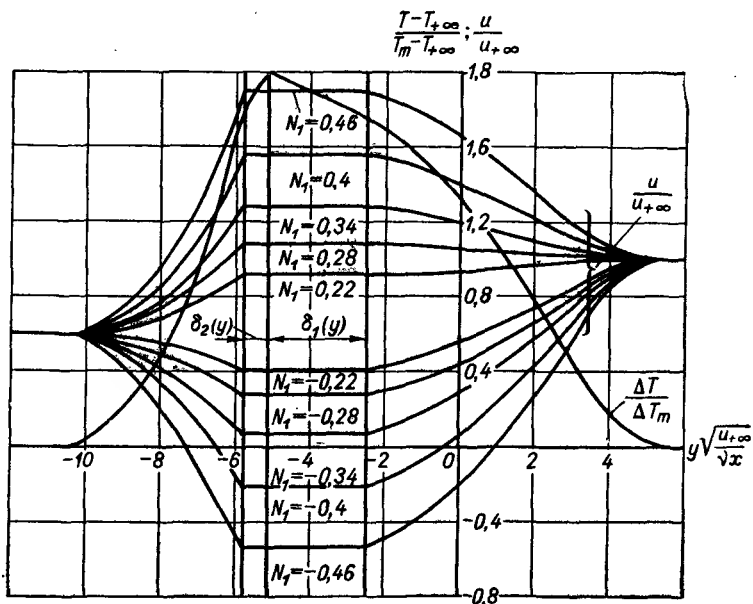


Рис. 9-7. Распределение скорости и температуры при различных значениях напряженности магнитного поля.

$m_u = 0,6, u_{+\infty} = 10$ м/сек, $\rho_{+\infty} = 1,25$ кг/м³, $T_{\pm\infty} = 300^\circ$ К, $c_{n0} = 0,25$ кг/кг, $c_{b0} = 0,23$ кг/кг, $q = 10^4$ ккал/кг, $E_0 = 3800$ в/м.

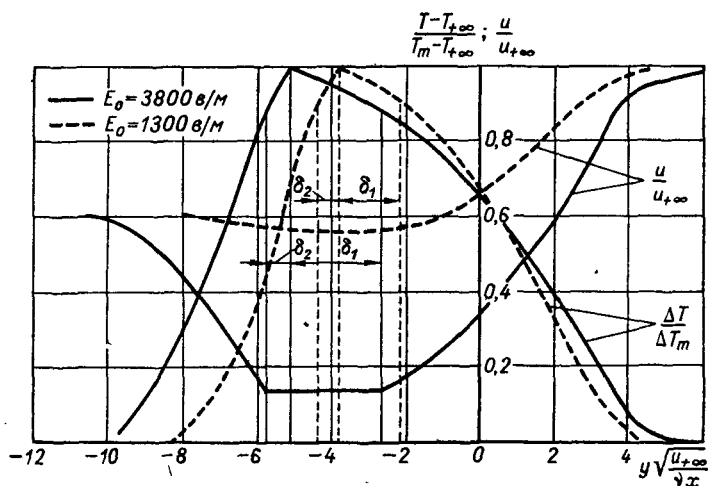


Рис. 9-8. Распределение скорости и температуры при различных значениях напряженности электрического поля.

$m_u = 0,6, u_{+\infty} = 10$ м/сек, $\rho_{+\infty} = 1,25$ кг/м³, $T_{\pm\infty} = 300^\circ$ К, $c_{a,+\infty} = 0,25$ кг/кг, $c_{b,+\infty} = 0,28$ кг/кг, $B_0 = 0,01$ вб/м², $q = 10^4$ ккал/кг.

ратуры в поперечных сечениях пограничного слоя при различных значениях магнитной индукции и напряженности электрического поля для весьма малых значений параметра x , что физически соответствует сгоранию высококалорийных смесей при умеренных значениях поля и различных значениях параметра N_1 . В этом случае профиль температуры практически не изменяется, а профиль скорости претерпевает заметные изменения. Расчет показывает, что скрещенные поля могут ускорить (большие положительные значения $N_1 > 0$) или замедлить (большие отрицательные значения N_1) течение газа.

На рис. 9-8 показано для двух значений x влияние электрического поля. С ростом поля фронт пламени смещается во внешнюю сторону пограничного слоя.

Как видно из этих примеров, с помощью скрещенных электрического и магнитного полей можно в сравнительно широких пределах воздействовать на температурный режим и аэродинамику диффузионного газового факела. Разумеется, что в рассмотренных примерах не учитывается возможное в принципе влияние полей на скорость реакций горения.

Глава десятая

ОБ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ФАКЕЛА

10-1. Сущность метода

Как отмечалось, прямым путем расчета факела, как и других случаев горения в потоке газа, было бы интегрирование основных уравнений, содержащих распределенные в объеме источники. Этот путь в виде аналитического решения задачи и даже численного расчета на ЭВМ весьма затруднителен из-за нелинейности основной системы дифференциальных уравнений (движения, энергии и диффузии) и наличия существенно нелинейных источников тепла и вещества. Более того, отсутствие в настоящее время достаточных сведений о закономерностях турбулентного переноса и кинетики реакций в пламенах (не говоря уже об общей незамкнутости системы уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа) существенно снижает эффективность численных расчетов. Наряду с этим со значительными трудностями сопряжено и прямое экспериментальное исследование процесса горения в потоке газа и, в частности, исследование турбулентного газового факела.

В этих условиях роль эффективного вспомогательного средства исследования могло бы сыграть электро моделирование [Л. 31], проведенное с сохранением основного в физической обстановке явления — аэродинамической структуры турбулентного потока и, в частности, влияния ее на макрокинетику процесса. Сущность моделирования сводится к имитации тепловыделения за счет

горения с помощью джоулева тепла, выделяющегося при прохождении через разогретый газ электрического тока.

Математическим основанием для такой аналогии является общность температурной зависимости скорости реакций (закон Аррениуса), с одной стороны, и электропроводности низкотемпературной плазмы, с другой. Для обоих явлений эту закономерность принято выражать в виде экспоненциальной зависимости от температуры:

$$\frac{k}{k_0} = \exp\left(-\frac{A_1}{T}\right) \text{ и } \frac{\sigma}{\sigma_0} = \exp\left(-\frac{A_2}{T}\right),$$

где в дополнение к принятым ранее обозначениям введены новые: A_1 и A_2 — соответственно величины, пропорциональные энергии активации для химической реакции и ионизации.

Существенно, что речь идет не только об одинаковом характере зависимости — резком возрастании величин k и σ с повышением температуры, но и о близости значений A_1 и A_2 по порядку величины. Некоторые типичные значения A_1 и A_2 (для $p = 1 \text{ атм}$) указаны в табл. 10-1.

Таблица 10-1

Вид плазмы	Ионизирующая присадка (калий или цезий), %	A_2 , эв	A_1 , эв, для углеводородных топлив
Воздух	—	2,24—расчет [Л. 107]	1,6—2,4
Продукты сгорания	0—1 (K)	2,24—опыт [Л. 112]	
»	0,02—0,04 (K)	1,94—расчет [Л. 115]	
Аргон	0,02 (Zs)	1,63—расчет [Л. 115]	

Аналогичный характер ряда эффектов (гистерезис и др.) при горении и при прохождении электрического тока через полупроводник, основанных на единой по виду температурной зависимости скорости реакции и сопротивления, отмечался ранее [Л. 29]. В рассматриваемой задаче, однако, речь идет о, вероятно, значительно более эффективном и, что особенно важно, близком к натурным условиям методе моделирования.

При обсуждении принципиальной возможности моделирования ограничимся следующими допущениями. Будем считать электрические токи, проходящие через низкотемпературную плазму, достаточно малыми, так что воздействие их на течение сведется к одному только тепловыделению. Этому случаю отвечает отсутствие магнитного поля, как приложенного, так и индуцированного, вследствие малости магнитного числа Рейнольдса ($Re_m \ll 1$). При соблюдении этого условия система дифференциальных уравнений движения и энергии для потока реагирующей газовой смеси и потока низкотемпературной плазмы, по которой протекает ток, при определенных условиях будет аналогичной. Действительно,

уравнения движения и неразрывности для вязкого сжимаемого газа в обоих случаях будут полностью совпадать. В уравнение энергии взамен удельного тепловыделения за счет химической реакции войдет джоулево тепло. Тожественным будет также уравнение состояния (идеального газа).

Для уравнения диффузии, входящего в систему уравнений, описывающих процесс горения, на плазменной модели не будет аналога. Для сохранения общности процессов и возможности приближенного моделирования следует обеспечить такой характер зависимости локального тока от сопротивления, который имитировал бы в конечном счете эффект выгорания горючей смеси. Иначе говоря, следует обеспечить температурную зависимость джоулева тепла, выделяющегося в плазме, аналогичную зависимости скорости тепловыделения при реакции от температуры. Для сильно экзотермических реакций эта зависимость (рис. 10-1) обладает следующими характерными свойствами: резким, практически экспоненциальным подъемом в области, близкой к воспламенению (интенсивным выгоранием — выделением тепла — вблизи максимальной температуры) и весьма крутым последующим спадом к нулю вследствие выгорания реагирующих компонентов. Поэтому простейшей качественно достоверной аппроксимацией этой зависимости на электрогазодинамической модели будет введение ограничения тока и выключение его при достижении заданной максимальной величины.

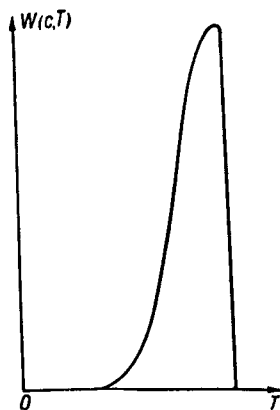


Рис. 10-1. Зависимость скорости реакции горения от температуры.

Подобие граничных условий — необходимое условие моделирования — будет осуществляться автоматически путем выбора соответствующей геометрически подобной схемы модели, распределения горячих и холодных потоков и т. д.

Наиболее просто осуществить аналогию на плоском течении, пропуская электрический ток через поток плазмы (продуктов сгорания или, например, разогретого инертного газа с легко ионизируемыми добавками) нормально к плоскости вектора скорости. Для осесимметричного движения осуществление моделирования, хотя принципиально и не исключено, сопряжено с рядом трудностей и здесь не рассматривается.

Обратимся к некоторым примерам, иллюстрирующим предлагаемый метод моделирования. Ограничимся при этом вначале только принципиальными соображениями. В качестве первого простейшего примера рассмотрим задачу о воспламенении в турбулентном потоке однородной горючей смеси, движущейся вдоль пластины. Рассмотрим температурное поле до воспламенения (включительно),

т. е. пренебрежем выгоранием смеси. В этом случае взамен третьего уравнения системы

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_t}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \rho i c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} + C_1 \exp\left(-\frac{A_1}{T}\right), \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

где $C_1 = \chi k_0$; $\chi \approx \text{ch}(T' A_1 / T^2)$ для случая $T' \ll \bar{T}$ (см. § 5-3), в общем случае $\chi = \bar{k}(\bar{T}) / k(\bar{T})$, будем иметь на модели (рис. 10-2) при прохождении тока через плазму уравнение

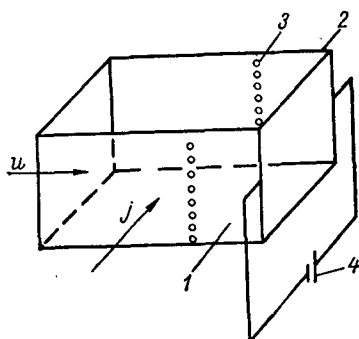


Рис. 10-2. Схема моделирования зажигания при продольном обтекании накаливаемой поверхности. 1 — пластина; 2 — электроды; 3 — измерительные электроды; 4 — источник питания.

$$\begin{aligned} \rho i c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \\ &= \frac{\partial q_t}{\partial y} + C_2 \exp\left(-\frac{A_2}{T}\right). \end{aligned} \quad (10-2)$$

В уравнениях (10-1) и (10-2) τ_t и q_t — соответственно касательное напряжение турбулентного трения и поток тепла, выражения $C_1 \chi \exp(-A_1/T)$ представляют собой соответственно тепловыделение за счет химической реакции и джоулево тепло, $C_2 = \text{const}(V^2/l^2)$, V — приложенное извне постоянное напряжение, l — расстояние между электродами на модели.

Характер температурного поля, отвечающего воспламенению, схематически показан на рис. 10-3 (аналогичные профили температуры, определенные численным расчетом, приведены в работе [Л. 83]).

Для того чтобы в той же задаче учесть в первом приближении выгорание, для условий подобия полей температуры и концентраций следует, как указывалось выше, принять множитель при экспоненте в виде $A_2(T_{\text{макс}} - T)$ ($T_{\text{макс}}$ — максимальное значение температуры) или, что практически удобнее, $A_2(j_{\text{макс}} - j)$, т. е. ввести на модели выключение тока при достижении максимального значения аналогично прекращению тепловыделения при достижении максимальной температуры $T = T_{\text{макс}}$.

На рис. 10-4 показана схема моделирования стабилизации пламени в плоском гомогенном турбулентном факеле за плохо обтекаемым телом. Как и в предыдущем примере, здесь сохраняются без изменения условия движения (осредненного и пульсационного) и «автоматически» воспроизводится уравнение энергии и его взаимосвязь с движением. Соблюдаются, очевидно, и граничные усло-

вия для скорости и температуры. Рассмотренная аналогия относится к случаю, когда число Льюиса $Le = a/D$ близко к единице, что достаточно точно выполняется в развитом турбулентном потоке.

Заметим также, что, используя плазму в качестве своеобразного термометра сопротивления, можно моделировать протекание процесса смешения в потоках сжимаемого газа. В этом случае, представляющем самостоятельный интерес, значение тока должно быть, очевидно, минимальным, обеспечивающим измерение, а выделяемое током тепло — пренебрежимо малым.

При практическом осуществлении электромоделирования процесса горения встретятся неизбежные трудности. В частности, по-

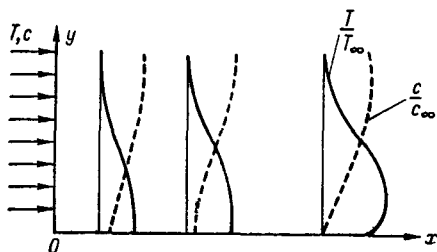


Рис. 10-3. Распределение температуры и концентрации в пограничном слое при обтекании накаливаемой поверхности потоком реагирующего газа.

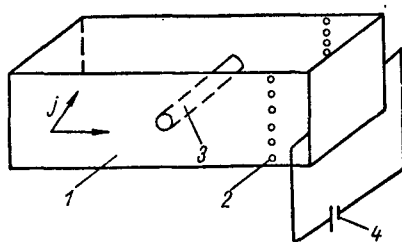


Рис. 10-4. Схема моделирования стабилизации пламени за плохо обтекаемым телом.

1 — электроды; 2 — измерительные электроды; 3 — плохо обтекаемое тело; 4 — источник питания.

требуется, по-видимому, избавиться от искажений, связанных с приэлектродным падением потенциала, и др. Предварительные данные показывают, что эти трудности могут быть преодолены. Наряду с этим желательна предварительная экспериментальная проверка основного в методе — возможности выявления в опытах влияния турбулентных пульсаций температуры на макроскопическую кинетику реакции. Этот вопрос может быть легче всего решен тем же методом электромоделирования при изучении влияния пульсаций на электропроводность низкотемпературной плазмы.

10-2. Некоторые результаты эксперимента

Приведем некоторые результаты экспериментальной проверки возможности электромоделирования турбулентного горения. Как указывалось ранее (см. § 5-3), к числу важных факторов, влияющих на макрокинетику турбулентного горения, относятся пульсации температуры. Непосредственное выявление их роли в прямом эксперименте с горящим факелом представляет значительные трудности. Поэтому целесообразно попытаться применить для этой цели аналогию, описанную в предыдущем параграфе.

Эксперимент, поставленный на модели в турбулентном потоке слабо ионизированного газа — продуктов сгорания, преследовал следующие основные цели.¹ Первой, методической, задачей являлась проверка возможности достаточно надежных измерений мгновенных и усредненных значений электропроводности в потоке газа с быстро меняющейся температурой. Эта задача решалась путем измерений проводимости в потоке, температура газа в котором

периодически менялась по заданному закону. Критерием точности измерений и методики в целом служило сопоставление результатов с данными теоретического расчета.

Вторая, основная, задача эксперимента состояла в проведении измерений проводимости в реальном потоке (по оси свободной турбулентной струи продуктов сгорания). Результаты этих опытов и сопоставление данных, относящихся к одинаковой средней температуре газа и разным уровням турбулентности, позволили выявить влияние пульсаций температуры, оценить их уровень и по аналогии сделать заключение о влиянии их на среднюю скорость реакций при турбулентном горении.

Экспериментальная установка для измерения проводимости газа в пульсирующем потоке с заданными частотой и формой колебаний состояла из камеры

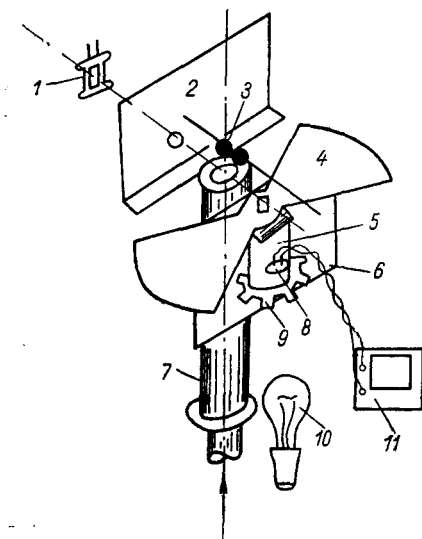


Рис. 10-5. Схема экспериментальной установки.

1 — фоторезистор ФС-А4, 2 — экран; 3 — измерительный зонд; 4 — модулятор; 5 — электродвигатель; 6 — защитный экран; 7 — камера сгорания; 8 — фотоспротивление; 9 — стробоскоп; 10 — осветитель; 11 — частотомер ЧЗ-7.

сгорания, обеспечивающей при сжигании смеси бутана и пропана с воздухом получение газовой струи с температурой порядка 2000°K (рис. 10-5). Пульсирующий поток создавался путем периодического пересечения струи специальными вращающимися заслонками, расположенными на расстоянии 5 мм от среза сопла. Это обеспечивало свободный выход газов в момент перекрытия струи и предотвращало нарушение заданного режима горения.

Температура пульсирующего потока измерялась двумя методами. В области низких частот (до 10 гц) использовался платиновый термометр сопротивления с диаметром нити 30 мк. Температура газа в области более высоких частот измерялась фотопирометрическим методом. В качестве датчика применялся фоторезистор

¹ В проведении эксперимента принимал участие М. Б. Хожателев.

ФС-А4 (постоянная времени $4 \cdot 10^{-5}$ сек). Сигнал с фоторезистора подавался на вход осциллографа С1-8А. Электрическая схема измерений пульсаций температуры фотопирометрическим методом приведена на рис. 10-6, а.

Электропроводность газа измерялась с помощью двойного зонда, выполненного в виде двух дисковых электродов (диаметром 8 мм и толщиной 0,2 мм), закрепленных на специальном микрокоординатнике, обеспечивавшем точную установку зазора между электродами (5 мм). Электроды были изготовлены из спектрально-чистой

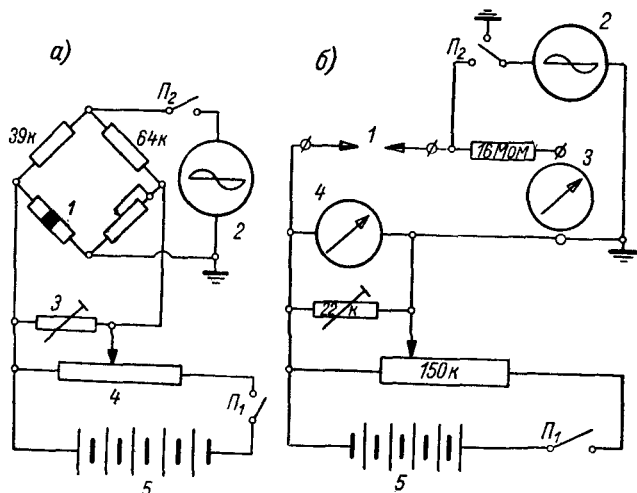


Рис. 10-6. Электрическая схема измерений: а — схема измерения температуры

1 — фоторезистор ФС-А4; 2 — осциллограф С1-8, 3—4 — делитель напряжения; 5 — батарея;

б — схема измерения проводимости

1 — измерительный зонд; 2 — осциллограф; 3 — микроамперметр; 4 — ламповый вольтметр, 5 — батарея.

платины. Электрическая схема измерения сопротивления газового промежутка (при заданной разности потенциалов 1,5 в) изображена на рис. 10-6, б.

Для колебаний рассматриваемого вида нетрудно получить выражение для отношения среднего значения электропроводности¹ к рассчитанному по измеренной средней температуре:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \beta} \left\{ \exp \left[\frac{A}{\bar{T}} \cdot \frac{\frac{T'_1}{\bar{T}}}{1 + \frac{T'_1}{\bar{T}}} \right] + \beta \exp \left[-\frac{A}{\bar{T}} \cdot \frac{\frac{T'_2}{\bar{T}}}{1 - \frac{T'_2}{\bar{T}}} \right] \right\}. \quad (10-3)$$

¹ При выводе формулы (10-3) предполагалось, что зависимость электропроводности газа от температуры может быть аппроксимирована экспоненциальной функцией $\sigma = \sigma_0 \exp(-A/\bar{T})$.

Для малых пульсаций (при $T'/\bar{T} \ll 1$) выражение (10-3) переходит в формулу (5-6):

$$\kappa \approx \text{ch} \left(\frac{T'A}{\bar{T}^2} \right).$$

В этих формулах $\kappa = \sigma(T)/\sigma(\bar{T})$; $\beta = \tau_2/\tau_1$ — отношение продолжительности импульсов низкой и высокой температуры; $|T'_1| = |T_1 - \bar{T}|$; $|T'_2| = |T - T_2|$; значение постоянной A было определено при измерении зависимости $\sigma(T)$ в потоке малой турбулентности. Было получено $A = 3,5 \cdot 10^4$ °К.

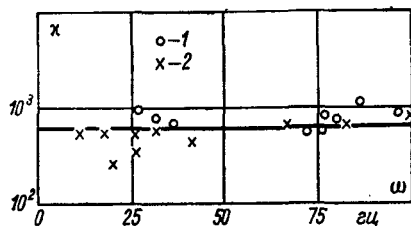


Рис. 10-7. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений κ . Измерение T : 1 — термометром сопротивления; 2 — фотопирометрическим методом.

На рис. 10-7 приведено сопоставление опытных и рассчитанных по формуле (10-3) значений κ . Как видно из графика, в исследованном интервале изменения частот результаты опыта удовлетворительно согласуются с расчетом. В частности, в опытах (рис. 10-7) подтверждено отсутствие влияния частоты прерываний (при $\omega \leq 100$ гц) на κ . Зависимость коэффициента κ от комплекса $\frac{A}{\bar{T}} \cdot \frac{T'_1/\bar{T}}{1 + (T'_1/\bar{T})}$ при постоянной частоте в диапазоне из-

менения значений β от 1 до 4 приведена на рис. 10-8. Эти результаты дают основание считать, что принятая методика зондовых измерений и регистраций пульсаций может быть использована для исследования в турбулентном потоке. Таким образом первая задача эксперимента была решена.

Экспериментально изучалась электропроводность в затопленной турбулентной струе. Выбор такого вида течения был обусловлен тем, что струя представляет собой один из простейших и наиболее изученных типов развитого турбулентного движения. Наряду с этим она является весьма удобным в экспериментальном отношении объектом исследования. Так, в частности, проводя измерения в различных точках струи, можно получить данные, относящиеся к различным уровням и масштабам турбулентности.

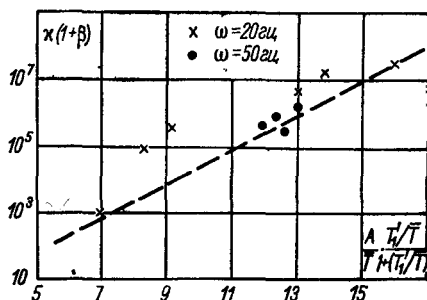


Рис. 10-8. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений κ при несимметричной форме колебаний температуры.

Принципиальная схема установки, на которой производились измерения проводимости в турбулентной струе продуктов сгорания, показана на рис. 10-9. Установка представляла собой прямоточную камеру сгорания, в которой сжигалась смесь бутана с воздухом. Для обеспечения устойчивого горения на различных режимах камера была снабжена стабилизирующим устройством. Коэффициент избытка воздуха α изменялся в пределах от 0,8 до 2. Газовая струя вытекала из керамического сопла с диаметром выхода $d_0 = 22$ мм. При работе на богатых смесях происходило частичное догорание газа в струе, т. е. образовывался турбулентный

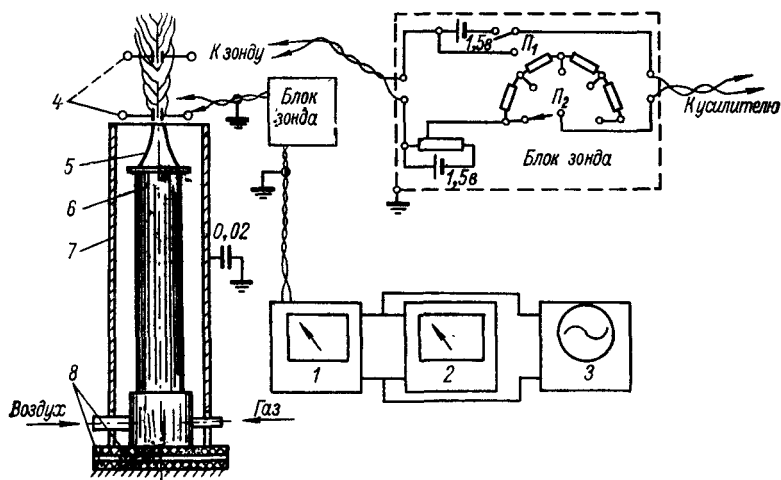


Рис. 10-9. Схема экспериментальной установки.

1 — усилитель УИПТ; 2 — ламповый вольтметр ВК7-7, 3 — осциллограф С1-8; 4 — измерительный зонд; 5 — сопло; 6 — камера; 7 — экран; 8 — изолятор.

диффузионный факел. Как и на первой установке, опыты проводились на чистых газах без присадки легко ионизируемых веществ.¹

Для измерения электропроводности использовался двойной зонд с платиновыми дисковыми электродами диаметром 4 мм. Перемещение зонда вдоль оси струи проводилось с помощью координатника, обеспечивающего точность отсчета порядка 0,1 мм. При измерении осредненного значения проводимости следует во избежание искажений применять зонды, характерные размеры которых больше размеров температурных неоднородностей в турбулентном потоке. Поэтому измерение проводилось на оси струи, т. е. в области, где поперечный градиент температуры близок к нулю, а масштабы турбулентности минимальны.

¹ При работе с присадками на малых экспериментальных установках обеспечить стабильность режима весьма затруднительно, так как даже незначительная неравномерность подачи щелочного металла приводит к заметным ошибкам.

На разных режимах работы установки были сняты вольт-амперные характеристики зонда, на основе которых выбиралось напряжение, подаваемое на зонд, в пределах линейного участка характеристики. Вся установка была снабжена экранами, устранявшими помехи от внешних источников.

Температура струи измерялась с помощью платинородиевой термопары с диаметром спая 0,3 мм. Температура струи на выходе из сопла изменялась в опытах от 900 до 2000° К.

На рис. 10-10 приведены данные по изменению средней температуры вдоль оси струи при различных режимах работы установки.

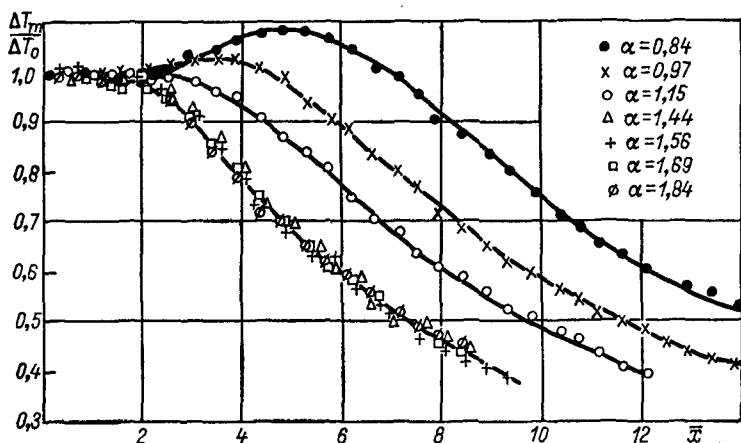


Рис. 10-10. Изменение температуры по оси струи при различных значениях коэффициента избытка воздуха.

Из графиков видно, что при обогащении смеси происходило заметное догорание газа в струе. Вследствие этого при снижении значения α наблюдалось менее интенсивное падение температуры по оси, а при $\alpha < 1$ — даже увеличение ее по сравнению с начальной.

Для выяснения влияния состава смеси на электропроводность была измерена проводимость в потенциальном ядре струи (при $T'/\bar{T} \approx 1 \div 2\%$) при различных значениях избытка воздуха (рис. 10-11, кривая 1). Из графика видно, что экспериментальные точки, относящиеся к различным режимам, группируются вблизи одной кривой. Это показывает, что в ядре струи проводимость определяется только средней температурой потока и не зависит от избытка воздуха.

Результаты измерения электропроводности в зоне турбулентного смешения (на оси струи на расстояниях до 12 калибров от сопла) приведены на рис. 10-11. Из графиков видно, что в этой области турбулентной струи проводимость существенно слабее зависит от средней температуры, чем в ядре струи. По абсолютному значению

эффективная проводимость при удалении от сопла резко (до пяти порядков) превышает значение, измеренное в ядре струи при той же средней температуре. Это может быть объяснено влиянием пульсаций температуры, интенсивность которых, как известно [Л. 109], возрастает вниз по потоку. Простейшая оценка порядка эффективной величины пульсаций температуры (по формуле (5-6) — для прямоугольных пульсаций] показывает, что $T'/\bar{T} \approx 30 \div 50\%$. Это значение согласуется с данными работы [Л. 57]. Обнаруженное

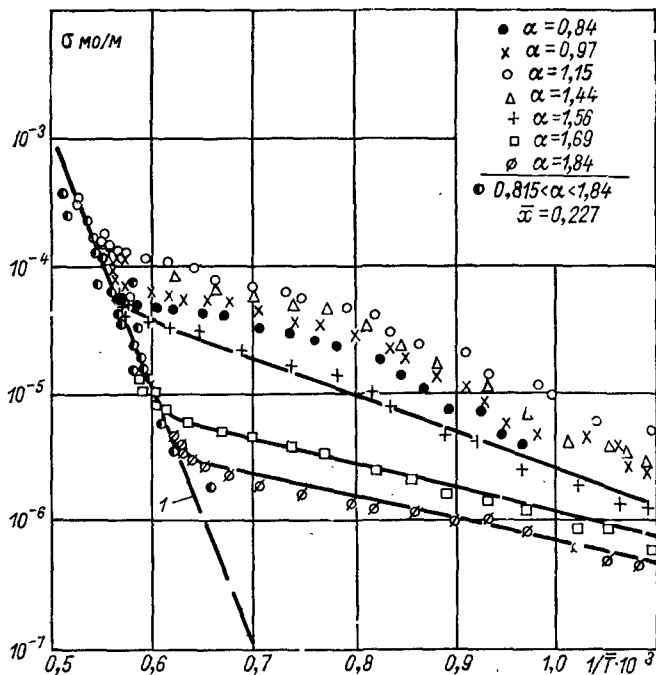


Рис. 10-11. Изменение проводимости по оси струи при различных значениях коэффициента избытка воздуха.

в опытах сравнительно слабое влияние избытка воздуха, по-видимому, вызвано догоранием газа в струе при $\alpha < 1$.

Таким образом, проведенные опыты свидетельствуют о существенном согласующемся с расчетом влиянии пульсаций температуры на измеренную величину электропроводности газа в турбулентном потоке.

Полученные результаты, помимо самостоятельного значения для изучения электропроводности турбулентного потока низкотемпературной плазмы, могут быть использованы для оценки влияния пульсаций температуры на макрокинетику реакций при турбулентном горении газа. Действительно, из аналогии температурных зависимостей константы скорости реакций и проводимости

следует, что при турбулентном горении (и близком значении энергии активации) превышение среднего по времени значения константы скорости реакций над значением ее, соответствующим средней температуре, будет порядка той же величины χ , что и в опытах по измерению проводимости. Иначе говоря, при значениях средней температуры газа в интервале 900—2000° К и уровне температурных пульсаций порядка 20—50% значение χ в соответствии с теоретическими представлениями (см. § 5-3) изменяется в пределах от 10 до 10⁷.

Этот результат, полученный с помощью электро моделирования, позволяет рассчитывать на перспективность метода для исследования турбулентного факела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем основные итоги и укажем в связи с этим некоторые результаты более поздних работ, а также задачи дальнейших исследований. Последовательное рассмотрение задач теории прямоструйного факела (от горения неперемешанных газов при бесконечно большой скорости реакций до теплового режима гомогенной смеси) позволило создать достаточно стройную, хотя во многом еще не завершенную теорию этого простейшего вида факела. Остановимся кратко на развитии рассмотренных выше вопросов.

Заметим прежде всего, что последовательное применение методов аэродинамической теории факела дает возможность рассмотреть единообразно весьма широкий круг задач о диффузионном горении. В частности, используя интенсивно развиваемые в последние годы интегральные методы теории струй¹, можно простым путем выявить характер зависимости длины различных типов диффузионных пламен (ламинарный или турбулентный, плоский и осесимметричный, также полуграниченный, веерный и другие факелы) от основных параметров. Анализ показывает, например, что длина осесимметричного факела, ламинарного или турбулентного, пропорциональна стехиометрическому комплексу $\Omega \frac{c_{a0}}{c_{b\infty}}$, тогда как длина плоского ламинарного факела пропорциональна кубу этого комплекса, а длина плоского турбулентного факела — квадрату. Приведенный пример, как и другие, здесь не обсуждаемые, говорит об известной перспективности применения в теории факела наряду с другими расчетными схемами интегральных методов расчета струй.

Заслуживают уточнения данные, относящиеся к переходному режиму течения в свободных струях и факеле. Специальные опыты (и обработка литературных данных) показывают, что в струях и факеле при некотором значении числа $Re_x = u_m x / \nu$ (порядка $2 \div 3 \cdot 10^4$) наблюдается характерный критический переход от ламинарного режима течения к турбулентному. Для этого перехода типичны резкое локальное расширение струи и гистерезисный излом кривой $u_m / u_0 =$

¹ А. С. Гиневский, Метод интегральных соотношений в теории турбулентных струй, Сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 27, «Машиностроение», 1966.

$= f(Re)$. Что касается зависимости длины факела от числа Re , то рассмотренная в первой главе картина (пропорциональность $l_f \sim Re$ в ламинарной области, постоянство $l_f \sim \text{const}$ — в турбулентной и характерный нелинейный критический переход «сверху» — см. рис. 1-5) относится к случаю пренебрежения влиянием объемных сил. В опытах при сравнительно больших значениях числа Архимеда (заметное влияние подъемной силы) была обнаружена вторая, бескризисная, форма перехода. В этом случае нарастание длины факела при переходе от ламинарного режима к турбулентному происходит плавно, монотонно (переход «снизу»). Это качественно совпадает с другими случаями проявления объемных сил в переходной области, например центробежной силы при движении в змеевиках¹ или электромагнитной силы при движении проводящей жидкости в поперечном магнитном поле².

Для теории турбулентного факела (так же как и для теории турбулентных струй) большое значение имеет изучение структуры пульсационного движения. Один из важных, сравнительно новых итогов исследования свободных струй несжимаемой жидкости состоит в том, что результаты прямых термоанемометрических измерений турбулентного напряжения трения ($\tau/\rho = \overline{u'v'}$) практически совпадают с результатами расчета на основе уравнений для осредненных величин. Это существенно подкрепляет полуэмпирические методы расчета и позволяет в факеле, как и в струях, подойти к оценке величины различных членов в уравнении баланса пульсационной энергии.

Наряду с этим заслуживают большого внимания и развития методы активного воздействия на турбулентную структуру струй и факела³. В частности, применение механического турбулизатора (в виде вращающегося с регулируемым числом оборотов диска, установленного перед соплом⁴) приводит к существенному повышению начального уровня турбулентности (до 15—20%). В результате (при значениях числа Струхала $Sh = nd_0/u_0 \geq 0,06 \div 0,10$) в свободной струе практически полностью исчезает начальный участок, заметно интенсифицируются эжекция и теплообмен и соответственно нарастает темп затухания струи. Применение такого же турбулизатора к газовому факелу вызывает резкую интенсификацию

¹ Д. Я. Мазуров, Г. В. Захаров, Исследование некоторых вопросов аэродинамики трубных змеевиков, «Теплоэнергетика», 1967, № 2.

² Л. А. Вулис, Б. А. Фоменко, О переходных режимах в магнитной гидродинамике, «Магнитная гидродинамика», 1966, № 1.

³ А. С. Гиневский, К. А. Почкина, Влияние начальной турбулентности потока на характеристики осесимметричной затопленной струи, Инженерно-физический журнал, 1967, № 1.

Л. А. Вулис, Ю. И. Михасенко, В. И. Хитриков, Об эффективном управлении распространением свободной турбулентной струи, Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 6.

⁴ Л. А. Вулис, Ю. И. Михасенко, Об интенсификации тепло- и массообмена в свободных турбулентных струях, Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1968, № 1.

горения — сокращение примерно вдвое длины факела, повышение теплонапряженности и др.

В результате более полных и систематических исследований факельного горения при активном воздействии на аэродинамику процесса (указанным выше или другим аналогичным способом) могут быть разработаны практические приемы эффективного регулирования процесса.

Дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования аэродинамики различных типов факелов будут способствовать сближению работ теоретического и прикладного направлений. Это относится к топочным устройствам стационарной и транспортной энергетики, к металлургическим печам¹ и др. Целесообразно в связи с этим коснуться основных аэродинамических схем газового факела, являющихся составными элементами большого числа различных топочных устройств.

Наряду с подробно рассмотренной в тексте схемой прямоструйного факела (затопленного, спутного, коаксиального и др.) значительный практический интерес представляют другие, более сложные и менее изученные схемы. В их числе прежде всего следует упомянуть закрученный факел. Теория закрученных струй удовлетворительно описывает такое движение только для случая слабой крутки потока, которому отвечает практическое отсутствие влияния вращательного течения на поступательное (и радиальное). При этом из анализа выпадает наиболее характерное явление — образование рециркуляционных зон обратных токов. Между тем, как известно, именно эти зоны в закрученном факеле, также в следе за стабилизатором в виде плохо обтекаемого тела или в углах камеры ограниченного размера определяют условия зажигания и стабилизации факела. Однако распространение теории и методов расчета струй на течение с сильной круткой отнюдь не бесперспективно. Наоборот, и об этом свидетельствуют отдельные попытки приближенного расчета, в результате обобщения опытных данных можно будет, по-видимому, построить и для этого типа течения схему инженерного расчета струй и факела. В качестве интересного примера исследования закрученного диффузионного факела сошлемся на работу по изучению «огненного вихря»².

Сказанное здесь в значительной мере относится и к схожему в аэродинамическом отношении случаю течения в следе за плохо обтекаемым телом. Что касается распространения струй и факела в ограниченном пространстве, то для этого типа задач уже сейчас можно с известным приближением применять те же методы расчета, например метод эквивалентной задачи теории теплопроводности

¹ В. А. А р у т ю н о в, Прикладная газодинамика в металлургических процессах. Сб. «Металлургическая теплотехника. Контрольно-измерительные приборы и автоматизация металлургического производства», Металлургиздат, 1966.

² E m m o n s H o w a r d W., Y i n g S h u h - J i n g «The fire whire», 11 th. Sympos. (Internat.) Combust., 1966.

(для полного импульса, т. е. суммы $p + \rho u^2$), что и в теории свободных струй и факела. При этом продольный градиент давления должен быть определен из расчета течения в одномерном приближении.

Недостаточно изучены распространенные в топочной технике струйные течения, которые можно условно объединить под названием пересекающихся струй. Речь идет, прежде всего, о распространении одной или нескольких струй в сносящем потоке (поперечном или ориентированном под некоторым углом). Для течений такого типа имеется значительное число экспериментальных данных и отдельные успешные, хотя и не доведенные до конца попытки теоретического обобщения их. В качестве первого приближения при построении систематической картины движения может быть использован так называемый метод наложения скоростных напоров. Это относится и к интересному в связи с проблемой струйной стабилизации пламени случаю распространения струи (факела) во встречном потоке.

К этой же группе течений относятся сложные струи, образующиеся при истечении газа из расположенных под углом сопел. И здесь для начального участка применим в качестве грубого расчетного приема метод наложения, тогда как на основном участке наиболее эффективен метод эквивалентной задачи, допускающий учет сложного начального профиля.

Исследование аэродинамики этих схем в значительной мере способствовало бы более полному и физически ясному пониманию процессов, происходящих в топочных устройствах, и могло бы служить основой для создания инженерных методов расчета. Во всех случаях задачи исследования таких течений близки к принятым при изучении прямоструйного факела. Они сводятся вкратце к определению местоположения зоны горения (факела пламени), областей интенсивного струйного смешения и критических с точки зрения теплового режима горения участков, для которых соизмеримо влияние факторов кинетической и диффузионной природы.

Значения P -функций

$\sqrt{\varepsilon}/r_0$ y/r_0	0,000	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,4	1,060	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
0,9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,995	0,991	0,987
1,0	1,000	0,982	0,972	0,952	0,905	0,840	0,790	0,747	0,722	0,699	0,680	0,661	0,646	0,631	0,618	0,606	0,596	0,586	0,577	0,569	0,560	0,552
1,05	0,500	0,492	0,489	0,486	0,483	0,480	0,477	0,474	0,472	0,469	0,467	0,464	0,461	0,458	0,455	0,452	0,449	0,446	0,443	0,440	0,437	0,434
1,1	1,1	0,400	0,250	0,288	0,307	0,322	0,332	0,339	0,346	0,351	0,356	0,361	0,364	0,367	0,370	0,372	0,373	0,375	0,376	0,377	0,378	0,378
1,15	1,15	0,040	0,040	0,083	0,116	0,144	0,169	0,193	0,213	0,231	0,250	0,263	0,274	0,283	0,290	0,297	0,302	0,307	0,312	0,316	0,319	0,322
1,2	1,2	0,005	0,005	0,070	0,100	0,120	0,140	0,160	0,184	0,201	0,214	0,225	0,235	0,242	0,248	0,254	0,260	0,265	0,269	0,270	0,271	0,272
1,25	1,25	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,007	0,020	0,045	0,076	0,105	0,125	0,140	0,152	0,163	0,174	0,184	0,194	0,202	0,209	0,216	0,223
1,3	1,3	0,001	0,001	0,001	0,004	0,004	0,006	0,015	0,030	0,046	0,062	0,077	0,091	0,104	0,115	0,127	0,138	0,148	0,157	0,166	0,174	0,181
1,35	1,35	0,001	0,002	0,003	0,008	0,015	0,024	0,034	0,045	0,057	0,067	0,079	0,089	0,098	0,104	0,111	0,116	0,120	0,125	0,130	0,134	0,142
1,4	1,4	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,45	1,45	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,55	1,55	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,6	1,6	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,65	1,65	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,7	1,7	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,75	1,75	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093
1,8	1,8	0,000	0,001	0,001	0,004	0,008	0,015	0,022	0,030	0,039	0,045	0,052	0,058	0,063	0,068	0,072	0,076	0,080	0,084	0,087	0,090	0,093

$V\sqrt{\xi}/r_0$ y/r_0	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33
0,0	0,987	0,982	0,975	0,968	0,959	0,949	0,938	0,925	0,913	0,899
0,1	0,985	0,979	0,971	0,963	0,954	0,945	0,934	0,921	0,908	0,894
0,2	0,977	0,971	0,963	0,955	0,945	0,934	0,922	0,907	0,893	0,877
0,3	0,969	0,951	0,941	0,931	0,918	0,906	0,893	0,879	0,865	0,850
0,4	0,930	0,918	0,906	0,895	0,882	0,869	0,856	0,841	0,826	0,811
0,5	0,888	0,876	0,863	0,849	0,835	0,821	0,807	0,793	0,778	0,763
0,6	0,828	0,814	0,800	0,785	0,771	0,757	0,745	0,730	0,716	0,703
0,7	0,747	0,732	0,720	0,707	0,694	0,682	0,670	0,658	0,647	0,635
0,8	0,654	0,642	0,630	0,619	0,608	0,598	0,588	0,578	0,569	0,560
0,9	0,544	0,536	0,529	0,521	0,514	0,507	0,501	0,494	0,488	0,482
1,0	0,431	0,428	0,425	0,422	0,419	0,416	0,413	0,410	0,407	0,404
1,05	0,378	0,378	0,378	0,377	0,376	0,375	0,374	0,372	0,370	0,368
1,1	0,324	0,325	0,327	0,328	0,329	0,329	0,330	0,330	0,329	0,329
1,15	0,273	0,277	0,280	0,284	0,287	0,289	0,291	0,292	0,293	0,294
1,2	0,228	0,233	0,238	0,241	0,245	0,248	0,251	0,254	0,256	0,259
1,25	0,188	0,194	0,200	0,205	0,209	0,214	0,218	0,222	0,225	0,228
1,3	0,149	0,156	0,163	0,169	0,175	0,181	0,186	0,190	0,194	0,197
1,35	0,120	0,127	0,134	0,140	0,146	0,152	0,157	0,162	0,166	0,170
1,4	0,093	0,100	0,106	0,113	0,119	0,125	0,130	0,135	0,139	0,144
1,45	0,071	0,077	0,083	0,089	0,095	0,101	0,107	0,112	0,117	0,122
1,5	0,054	0,059	0,064	0,070	0,076	0,082	0,087	0,092	0,097	0,102
1,55	0,040	0,045	0,051	0,056	0,061	0,067	0,072	0,077	0,081	0,086
1,6	0,029	0,034	0,039	0,043	0,048	0,052	0,057	0,062	0,066	0,070
1,65	0,021	0,025	0,029	0,032	0,036	0,041	0,045	0,049	0,053	0,057
1,7	0,014	0,018	0,021	0,024	0,028	0,031	0,035	0,039	0,042	0,046
1,75	0,010	0,013	0,015	0,018	0,021	0,024	0,027	0,031	0,031	0,038
1,8	0,007	0,009	0,011	0,013	0,016	0,018	0,021	0,024	0,026	0,029
1,85	0,004	0,005	0,007	0,009	0,011	0,013	0,015	0,018	0,020	0,023
1,9	0,002	0,004	0,005	0,006	0,008	0,010	0,011	0,013	0,015	0,017
1,95	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,009	0,010	0,012	0,014
2,0	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,004	0,006	0,007	0,009	0,010
2,05	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008
2,1	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006
2,15	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005
2,2	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003
2,25							0,001	0,001	0,002	0,003
2,3							0,000	0,001	0,002	0,003
2,35							0,000	0,001	0,001	0,002
2,4							0,000	0,001	0,001	0,001
2,45										0,001
2,5										0,001
2,55										0,001
2,6										0,001
2,65										0,000
2,7										
2,75										
2,8										
2,85										

0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45
0,883	0,869	0,854	0,838	0,822	0,806	0,791	0,774	0,758	0,741	0,725	0,709
0,880	0,865	0,849	0,833	0,816	0,800	0,785	0,768	0,751	0,735	0,719	0,703
0,862	0,846	0,830	0,814	0,799	0,783	0,768	0,752	0,736	0,720	0,706	0,690
0,835	0,820	0,805	0,800	0,775	0,758	0,744	0,729	0,714	0,699	0,684	0,669
0,797	0,782	0,767	0,753	0,739	0,724	0,710	0,695	0,680	0,665	0,652	0,638
0,750	0,736	0,723	0,710	0,696	0,683	0,670	0,657	0,645	0,632	0,620	0,607
0,690	0,678	0,665	0,654	0,642	0,631	0,620	0,608	0,596	0,584	0,572	0,561
0,625	0,614	0,603	0,593	0,583	0,573	0,563	0,554	0,545	0,535	0,525	0,516
0,551	0,543	0,535	0,528	0,520	0,512	0,505	0,497	0,490	0,482	0,475	0,467
0,476	0,471	0,465	0,459	0,453	0,448	0,443	0,437	0,432	0,426	0,421	0,415
0,401	0,398	0,394	0,391	0,388	0,384	0,381	0,377	0,371	0,370	0,367	0,363
0,366	0,364	0,362	0,359	0,357	0,354	0,352	0,349	0,347	0,344	0,342	0,339
0,328	0,327	0,326	0,325	0,324	0,323	0,322	0,320	0,319	0,317	0,315	0,313
0,294	0,294	0,294	0,294	0,294	0,294	0,293	0,293	0,292	0,291	0,290	0,289
0,260	0,262	0,263	0,264	0,265	0,266	0,266	0,266	0,266	0,266	0,266	0,266
0,231	0,233	0,235	0,236	0,238	0,239	0,240	0,241	0,242	0,243	0,243	0,244
0,200	0,203	0,205	0,208	0,210	0,212	0,214	0,217	0,218	0,220	0,221	0,222
0,174	0,178	0,181	0,184	0,187	0,190	0,193	0,195	0,197	0,193	0,200	0,201
0,149	0,153	0,157	0,160	0,164	0,167	0,170	0,173	0,175	0,178	0,179	0,182
0,126	0,131	0,135	0,139	0,143	0,146	0,149	0,152	0,155	0,158	0,160	0,162
0,107	0,111	0,115	0,119	0,123	0,127	0,130	0,134	0,137	0,140	0,142	0,145
0,091	0,099	0,103	0,107	0,110	0,114	0,117	0,120	0,123	0,126	0,129	0,131
0,074	0,083	0,087	0,091	0,095	0,098	0,102	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117
0,061	0,066	0,069	0,073	0,077	0,081	0,084	0,088	0,091	0,094	0,097	0,101
0,049	0,053	0,057	0,061	0,065	0,069	0,072	0,075	0,079	0,082	0,085	0,088
0,041	0,045	0,048	0,052	0,056	0,059	0,063	0,066	0,069	0,073	0,076	0,079
0,033	0,036	0,039	0,042	0,046	0,049	0,053	0,055	0,059	0,063	0,066	0,069
0,026	0,028	0,031	0,034	0,037	0,040	0,043	0,046	0,043	0,051	0,054	0,057
0,020	0,023	0,025	0,028	0,031	0,033	0,036	0,039	0,042	0,044	0,047	0,050
0,016	0,018	0,020	0,022	0,025	0,027	0,030	0,032	0,034	0,037	0,039	0,042
0,012	0,014	0,016	0,018	0,020	0,022	0,024	0,027	0,029	0,032	0,034	0,036
0,009	0,011	0,012	0,014	0,016	0,017	0,019	0,021	0,023	0,025	0,027	0,030
0,007	0,009	0,010	0,011	0,013	0,015	0,016	0,018	0,020	0,022	0,024	0,025
0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,012	0,013	0,015	0,016	0,018	0,020	0,022
0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,011	0,012	0,014	0,015	0,016	0,018
0,003	0,004	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,011	0,012	0,013	0,015
0,003	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,011	0,012
0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,009	0,010
0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,006	0,007	0,008
0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007
0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006
0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004
0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,004
						0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
						0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
						0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
						0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001

$V \sqrt{\epsilon/r_0}$												
y/r_0	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
0,0	0,694	0,678	0,652	0,647	0,632	0,618	0,604	0,590	0,576	0,563	0,550	0,537
0,1	0,687	0,671	0,656	0,641	0,626	0,612	0,598	0,584	0,570	0,558	0,546	0,533
0,2	0,674	0,659	0,644	0,629	0,616	0,603	0,591	0,577	0,565	0,552	0,539	0,527
0,3	0,655	0,640	0,626	0,611	0,598	0,586	0,574	0,561	0,549	0,536	0,525	0,512
0,4	0,624	0,610	0,597	0,584	0,573	0,561	0,550	0,538	0,527	0,515	0,503	0,493
0,5	0,595	0,581	0,569	0,557	0,545	0,534	0,523	0,513	0,502	0,491	0,482	0,472
0,6	0,550	0,540	0,530	0,520	0,510	0,501	0,492	0,482	0,473	0,464	0,454	0,445
0,7	0,507	0,497	0,488	0,479	0,470	0,463	0,455	0,447	0,449	0,431	0,423	0,416
0,8	0,460	0,452	0,445	0,438	0,431	0,424	0,417	0,411	0,404	0,398	0,392	0,385
0,9	0,410	0,405	0,399	0,394	0,389	0,383	0,378	0,373	0,368	0,363	0,358	0,352
1,0	0,360	0,356	0,353	0,349	0,346	0,342	0,338	0,335	0,332	0,327	0,324	0,320
1,05	0,336	0,333	0,330	0,327	0,324	0,320	0,317	0,314	0,311	0,308	0,304	0,301
1,1	0,311	0,309	0,307	0,305	0,303	0,301	0,299	0,296	0,294	0,291	0,289	0,286
1,15	0,288	0,286	0,285	0,283	0,282	0,280	0,278	0,276	0,274	0,272	0,270	0,268
1,2	0,265	0,264	0,263	0,263	0,260	0,261	0,259	0,258	0,257	0,255	0,254	0,252
1,25	0,244	0,244	0,244	0,243	0,243	0,242	0,241	0,241	0,240	0,239	0,238	0,236
1,3	0,222	0,223	0,223	0,223	0,223	0,223	0,223	0,223	0,223	0,222	0,222	0,221
1,35	0,202	0,203	0,204	0,204	0,205	0,205	0,205	0,205	0,205	0,205	0,205	0,205
1,4	0,183	0,185	0,186	0,187	0,188	0,188	0,189	0,190	0,190	0,190	0,191	0,191
1,45	0,164	0,166	0,168	0,170	0,171	0,172	0,174	0,175	0,176	0,176	0,177	0,177
1,5	0,147	0,149	0,151	0,153	0,155	0,157	0,158	0,159	0,161	0,162	0,163	0,164
1,55	0,131	0,131	0,136	0,138	0,140	0,142	0,143	0,145	0,147	0,148	0,149	0,150
1,6	0,117	0,120	0,122	0,124	0,126	0,128	0,130	0,132	0,133	0,135	0,136	0,138
1,65	0,103	0,106	0,109	0,111	0,114	0,116	0,118	0,120	0,122	0,124	0,125	0,127
1,7	0,091	0,094	0,096	0,099	0,101	0,103	0,106	0,108	0,110	0,112	0,113	0,115
1,75	0,081	0,084	0,087	0,089	0,091	0,094	0,096	0,098	0,100	0,101	0,103	0,105
1,8	0,071	0,074	0,076	0,079	0,081	0,084	0,086	0,088	0,090	0,091	0,093	0,095
1,85	0,060	0,062	0,065	0,068	0,070	0,072	0,074	0,077	0,079	0,081	0,083	0,085
1,9	0,052	0,055	0,057	0,059	0,062	0,064	0,066	0,069	0,071	0,073	0,075	0,077
1,95	0,045	0,047	0,049	0,052	0,054	0,056	0,058	0,061	0,063	0,065	0,067	0,069
2,0	0,038	0,040	0,042	0,044	0,047	0,049	0,051	0,053	0,055	0,057	0,059	0,061
2,05	0,032	0,034	0,036	0,039	0,040	0,043	0,044	0,047	0,049	0,051	0,053	0,055
2,1	0,027	0,029	0,031	0,033	0,035	0,037	0,039	0,041	0,043	0,045	0,047	0,049
2,15	0,024	0,025	0,027	0,029	0,031	0,033	0,034	0,036	0,038	0,040	0,042	0,044
2,2	0,020	0,021	0,023	0,025	0,026	0,028	0,030	0,031	0,033	0,035	0,037	0,038
2,25	0,016	0,018	0,019	0,021	0,022	0,024	0,026	0,027	0,029	0,031	0,032	0,034
2,3	0,014	0,015	0,016	0,018	0,019	0,021	0,022	0,024	0,025	0,027	0,028	0,029
2,35	0,012	0,013	0,014	0,015	0,017	0,018	0,019	0,021	0,022	0,024	0,025	0,026
2,4	0,009	0,010	0,012	0,013	0,014	0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,022	0,023
2,45	0,008	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,019
2,5	0,006	0,007	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,012	0,004	0,015	0,016	0,017
2,55	0,005	0,006	0,007	0,007	0,008	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015
2,6	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,012
2,65	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011
2,70	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,008	0,009
2,75	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,008
2,8	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007
2,85	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005
2,9	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005
2,95	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004
3,0	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003
3,05					0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003
3,1						0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002
3,15							0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002
3,2								0,001	0,001	0,001	0,001	0,002
3,25									0,001	0,001	0,001	0,002
3,3										0,001	0,001	0,002
3,35											0,001	0,001
3,4												0,001
3,45												
3,5												
3,55												
3,6												
3,65												
3,7												
3,75												
3,8												

0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70
0,524	0,511	0,500	0,488	0,477	0,467	0,457	0,447	0,437	0,428	0,418	0,408	0,399
0,520	0,508	0,496	0,485	0,474	0,464	0,454	0,445	0,435	0,425	0,416	0,406	0,397
0,514	0,502	0,491	0,480	0,470	0,459	0,449	0,439	0,429	0,420	0,411	0,401	0,393
0,501	0,490	0,478	0,467	0,456	0,447	0,438	0,428	0,419	0,411	0,402	0,394	0,386
0,482	0,471	0,461	0,452	0,443	0,434	0,425	0,416	0,408	0,400	0,392	0,384	0,377
0,462	0,453	0,444	0,435	0,426	0,417	0,408	0,399	0,392	0,384	0,377	0,370	0,363
0,437	0,428	0,420	0,412	0,404	0,396	0,389	0,381	0,374	0,367	0,360	0,354	0,347
0,408	0,400	0,394	0,387	0,380	0,373	0,367	0,360	0,353	0,347	0,341	0,335	0,329
0,379	0,373	0,366	0,360	0,355	0,349	0,344	0,338	0,332	0,327	0,321	0,316	0,310
0,347	0,342	0,338	0,333	0,328	0,323	0,318	0,313	0,308	0,304	0,299	0,295	0,290
0,316	0,312	0,308	0,304	0,301	0,296	0,293	0,288	0,285	0,281	0,277	0,273	0,269
0,298	0,294	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278	0,274	0,271	0,268	0,265	0,261	0,258
0,283	0,280	0,277	0,274	0,271	0,268	0,265	0,262	0,259	0,256	0,253	0,250	0,247
0,265	0,263	0,261	0,259	0,256	0,254	0,252	0,249	0,247	0,244	0,242	0,239	0,236
0,250	0,249	0,247	0,245	0,243	0,241	0,239	0,237	0,236	0,233	0,231	0,229	0,227
0,235	0,234	0,233	0,231	0,229	0,228	0,226	0,224	0,223	0,221	0,219	0,217	0,215
0,221	0,220	0,219	0,218	0,216	0,215	0,214	0,213	0,211	0,209	0,208	0,206	0,204
0,205	0,204	0,204	0,203	0,202	0,202	0,201	0,200	0,199	0,198	0,196	0,195	0,194
0,191	0,191	0,190	0,190	0,190	0,190	0,189	0,188	0,187	0,187	0,186	0,185	0,184
0,177	0,177	0,177	0,177	0,177	0,176	0,176	0,176	0,175	0,175	0,174	0,174	0,173
0,164	0,175	0,175	0,176	0,176	0,176	0,176	0,166	0,166	0,165	0,165	0,165	0,164
0,151	0,152	0,153	0,154	0,154	0,155	0,155	0,155	0,155	0,156	0,156	0,156	0,156
0,139	0,140	0,141	0,142	0,142	0,143	0,144	0,144	0,144	0,144	0,145	0,145	0,145
0,128	0,129	0,130	0,131	0,132	0,133	0,134	0,134	0,135	0,135	0,135	0,136	0,136
0,117	0,118	0,119	0,121	0,122	0,123	0,124	0,124	0,125	0,126	0,126	0,127	0,128
0,106	0,108	0,109	0,110	0,112	0,113	0,114	0,115	0,116	0,117	0,118	0,118	0,119
0,097	0,098	0,099	0,101	0,102	0,104	0,105	0,106	0,107	0,108	0,109	0,110	0,111
0,087	0,089	0,091	0,093	0,094	0,095	0,097	0,098	0,099	0,100	0,101	0,102	0,103
0,079	0,081	0,083	0,085	0,086	0,087	0,089	0,090	0,091	0,092	0,093	0,094	0,095
0,071	0,073	0,074	0,076	0,078	0,079	0,081	0,082	0,083	0,085	0,086	0,088	0,089
0,063	0,065	0,067	0,069	0,071	0,072	0,074	0,075	0,076	0,078	0,079	0,080	0,081
0,057	0,058	0,060	0,062	0,064	0,065	0,067	0,069	0,070	0,072	0,073	0,075	0,076
0,051	0,053	0,055	0,056	0,058	0,059	0,061	0,062	0,064	0,065	0,066	0,068	0,069
0,046	0,047	0,049	0,051	0,052	0,054	0,055	0,057	0,058	0,060	0,061	0,062	0,064
0,040	0,042	0,044	0,046	0,047	0,049	0,050	0,052	0,053	0,054	0,056	0,057	0,058
0,036	0,037	0,039	0,041	0,042	0,044	0,045	0,047	0,048	0,049	0,050	0,052	0,053
0,031	0,032	0,034	0,035	0,037	0,038	0,040	0,041	0,043	0,044	0,045	0,046	0,048
0,027	0,029	0,030	0,032	0,033	0,034	0,035	0,037	0,038	0,039	0,041	0,042	0,043
0,024	0,025	0,027	0,028	0,029	0,030	0,031	0,033	0,034	0,035	0,037	0,038	0,039
0,021	0,022	0,023	0,024	0,026	0,027	0,028	0,029	0,030	0,031	0,033	0,034	0,035
0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029	0,031	0,032
0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025	0,027	0,028	0,029
0,013	0,015	0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025	0,026
0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024
0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022
0,009	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,017	0,018	0,019
0,007	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,012	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,016
0,006	0,007	0,007	0,008	0,009	0,010	0,010	0,011	0,012	0,012	0,013	0,014	0,015
0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,008	0,009	0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013
0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,011
0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010
0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009
0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008
0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,007	0,007
0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,005	0,006	0,007
0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005
0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005
0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004
0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003
	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	1,002
							0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
							0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
							0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
							0,000	0,000	0,001	0,001	0,004	0,001

$\sqrt{\xi}/r_0$												
y/r_0	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82
0,0	0,390	0,381	0,373	0,366	0,358	0,351	0,344	0,337	0,330	0,324	0,317	0,311
0,1	0,388	0,380	0,371	0,364	0,356	0,349	0,342	0,336	0,328	0,322	0,315	0,309
0,2	0,385	0,377	0,368	0,360	0,352	0,345	0,338	0,331	0,325	0,318	0,312	0,306
0,3	0,378	0,370	0,363	0,355	0,348	0,341	0,334	0,328	0,321	0,315	0,309	0,303
0,4	0,369	0,361	0,354	0,347	0,340	0,333	0,326	0,320	0,313	0,307	0,301	0,296
0,5	0,356	0,349	0,343	0,336	0,330	0,323	0,317	0,311	0,305	0,299	0,293	0,288
0,6	0,340	0,334	0,328	0,322	0,316	0,311	0,305	0,299	0,294	0,288	0,283	0,278
0,7	0,323	0,317	0,312	0,307	0,302	0,297	0,292	0,288	0,283	0,278	0,273	0,269
0,8	0,305	0,301	0,296	0,291	0,286	0,282	0,278	0,273	0,269	0,265	0,260	0,256
0,9	0,286	0,282	0,278	0,274	0,270	0,266	0,262	0,258	0,255	0,251	0,247	0,244
1,0	0,265	0,262	0,258	0,255	0,252	0,248	0,245	0,241	0,238	0,235	0,232	0,228
1,05	0,255	0,252	0,249	0,246	0,243	0,240	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221
1,1	0,244	0,241	0,238	0,235	0,233	0,230	0,227	0,224	0,222	0,219	0,216	0,213
1,15	0,234	0,232	0,229	0,226	0,224	0,221	0,218	0,216	0,213	0,211	0,208	0,206
1,2	0,224	0,222	0,220	0,218	0,215	0,213	0,211	0,209	0,206	0,204	0,202	0,200
1,25	0,214	0,212	0,210	0,208	0,206	0,204	0,202	0,200	0,198	0,196	0,194	0,193
1,3	0,203	0,202	0,200	0,198	0,196	0,195	0,193	0,191	0,189	0,188	0,186	0,185
1,35	0,193	0,192	0,190	0,189	0,188	0,186	0,185	0,183	0,182	0,181	0,179	0,178
1,4	0,183	0,182	0,182	0,180	0,179	0,178	0,177	0,176	0,175	0,174	0,172	0,171
1,45	0,173	0,172	0,172	0,171	0,170	0,169	0,169	0,168	0,167	0,166	0,165	0,164
1,5	0,164	0,163	0,163	0,162	0,161	0,161	0,160	0,160	0,159	0,158	0,157	0,156
1,55	0,155	0,155	0,155	0,155	0,155	0,155	0,154	0,154	0,153	0,152	0,151	0,150
1,6	0,145	0,145	0,145	0,145	0,145	0,145	0,145	0,145	0,145	0,144	0,144	0,143
1,65	0,137	0,137	0,137	0,137	0,137	0,138	0,138	0,138	0,138	0,137	0,137	0,136
1,7	0,128	0,129	0,129	0,130	0,130	0,130	0,130	0,130	0,130	0,130	0,130	0,130
1,75	0,120	0,121	0,121	0,122	0,122	0,122	0,123	0,123	0,123	0,123	0,123	0,123
1,8	0,111	0,112	0,113	0,114	0,114	0,115	0,116	0,116	0,116	0,116	0,117	0,117
1,85	0,103	0,104	0,105	0,106	0,107	0,107	0,108	0,109	0,109	0,109	0,110	0,110
1,9	0,096	0,097	0,098	0,099	0,100	0,100	0,101	0,101	0,102	0,102	0,103	0,103
1,95	0,090	0,091	0,092	0,093	0,094	0,094	0,095	0,096	0,096	0,097	0,097	0,098
2,0	0,082	0,083	0,084	0,085	0,087	0,087	0,088	0,089	0,090	0,091	0,092	0,092
2,05	0,077	0,078	0,079	0,080	0,081	0,082	0,083	0,084	0,084	0,085	0,086	0,086
2,1	0,070	0,071	0,072	0,073	0,074	0,075	0,076	0,077	0,078	0,079	0,080	0,080
2,15	0,065	0,066	0,067	0,068	0,069	0,071	0,072	0,072	0,073	0,074	0,075	0,073
2,2	0,059	0,060	0,062	0,063	0,064	0,065	0,066	0,066	0,069	0,070	0,070	0,071
2,25	0,054	0,055	0,057	0,058	0,059	0,061	0,062	0,063	0,064	0,065	0,066	0,067
2,3	0,049	0,050	0,052	0,053	0,054	0,056	0,057	0,058	0,059	0,060	0,061	0,062
2,35	0,045	0,046	0,047	0,048	0,050	0,051	0,053	0,054	0,055	0,056	0,057	0,058
2,4	0,041	0,042	0,043	0,045	0,046	0,047	0,049	0,050	0,052	0,053	0,054	0,055
2,45	0,036	0,037	0,039	0,040	0,041	0,043	0,044	0,046	0,047	0,048	0,050	0,051
2,5	0,033	0,034	0,035	0,037	0,038	0,040	0,041	0,042	0,044	0,045	0,046	0,047
2,55	0,030	0,031	0,032	0,034	0,035	0,036	0,037	0,038	0,039	0,041	0,041	0,042
2,6	0,027	0,028	0,029	0,031	0,032	0,033	0,034	0,035	0,036	0,037	0,038	0,040
2,65	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029	0,030	0,031	0,032	0,033	0,034	0,035	0,036
2,7	0,023	0,024	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029	0,030	0,031	0,032	0,032	0,033
2,75	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029	0,030	0,031
2,8	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025	0,026	0,027	0,028
2,85	0,016	0,017	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024	0,025	0,026
2,9	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022	0,023	0,024
2,95	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,017	0,018	0,019	0,020	0,021	0,022
3,0	0,011	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,018	0,019	0,020
3,05	0,010	0,010	0,011	0,012	0,013	0,013	0,014	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018
3,1	0,009	0,009	0,010	0,011	0,011	0,012	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016
3,15	0,007	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,012	0,013	0,013	0,014	0,015
3,2	0,007	0,008	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,012	0,012	0,013
3,25	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,012	0,012
3,3	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011
3,35	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010
3,4	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,008	0,009
3,45	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,007	0,007	0,007
3,5	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006
3,55	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006
3,6	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005	0,006
3,65	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005
3,7	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004
3,75	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004
3,8	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004
3,85	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004
3,9	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004
3,95	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003
4,0	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003

0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
0,305	0,299	0,293	0,287	0,282	0,277	0,271	0,266	0,261	0,257	0,252	0,247	0,243
0,303	0,297	0,292	0,286	0,281	0,276	0,271	0,266	0,261	0,257	0,252	0,247	0,243
0,300	0,294	0,289	0,284	0,279	0,274	0,270	0,265	0,260	0,255	0,251	0,246	0,242
0,297	0,291	0,285	0,280	0,275	0,270	0,265	0,260	0,255	0,251	0,247	0,242	0,238
0,290	0,285	0,280	0,275	0,270	0,265	0,260	0,256	0,251	0,247	0,243	0,238	0,234
0,282	0,277	0,272	0,267	0,263	0,258	0,254	0,250	0,245	0,241	0,237	0,233	0,229
0,273	0,269	0,264	0,259	0,254	0,250	0,246	0,242	0,238	0,234	0,230	0,226	0,222
0,264	0,259	0,255	0,250	0,246	0,242	0,238	0,234	0,230	0,227	0,223	0,219	0,216
0,252	0,248	0,244	0,240	0,236	0,232	0,229	0,225	0,221	0,218	0,214	0,211	0,208
0,240	0,236	0,233	0,229	0,226	0,222	0,219	0,216	0,212	0,209	0,206	0,203	0,199
0,225	0,222	0,219	0,216	0,213	0,210	0,208	0,205	0,202	0,199	0,196	0,194	0,191
0,218	0,216	0,213	0,210	0,207	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194	0,191	0,188	0,186
0,211	0,208	0,206	0,204	0,201	0,199	0,196	0,194	0,192	0,189	0,187	0,184	0,182
0,203	0,201	0,199	0,197	0,194	0,192	0,190	0,188	0,185	0,183	0,180	0,178	0,175
0,197	0,195	0,193	0,191	0,189	0,187	0,185	0,183	0,180	0,178	0,176	0,174	0,171
0,191	0,189	0,187	0,185	0,183	0,181	0,179	0,177	0,175	0,173	0,171	0,168	0,166
0,183	0,181	0,180	0,178	0,176	0,175	0,173	0,171	0,169	0,167	0,165	0,163	0,161
0,176	0,175	0,174	0,172	0,170	0,168	0,167	0,165	0,163	0,161	0,160	0,158	0,156
0,169	0,168	0,167	0,165	0,164	0,162	0,160	0,159	0,157	0,155	0,154	0,152	0,150
0,163	0,162	0,160	0,159	0,158	0,156	0,155	0,153	0,152	0,150	0,149	0,148	0,146
0,155	0,154	0,153	0,152	0,151	0,150	0,149	0,147	0,146	0,145	0,143	0,142	0,141
0,149	0,148	0,148	0,146	0,145	0,143	0,142	0,141	0,139	0,138	0,137	0,136	0,135
0,143	0,142	0,141	0,140	0,139	0,138	0,137	0,135	0,134	0,133	0,132	0,131	0,130
0,136	0,135	0,134	0,133	0,132	0,131	0,130	0,129	0,128	0,127	0,126	0,125	0,124
0,129	0,129	0,128	0,128	0,127	0,126	0,125	0,125	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120
0,123	0,123	0,123	0,122	0,122	0,121	0,120	0,119	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115
0,117	0,117	0,117	0,116	0,116	0,115	0,114	0,114	0,113	0,112	0,111	0,110	0,110
0,110	0,110	0,110	0,110	0,110	0,109	0,109	0,108	0,107	0,107	0,106	0,105	0,105
0,103	0,103	0,103	0,103	0,103	0,103	0,102	0,102	0,101	0,100	0,100	0,099	0,099
0,098	0,098	0,098	0,098	0,098	0,098	0,097	0,097	0,096	0,096	0,095	0,095	0,094
0,093	0,093	0,093	0,093	0,093	0,093	0,093	0,092	0,092	0,091	0,091	0,090	0,090
0,087	0,087	0,087	0,088	0,088	0,088	0,088	0,087	0,087	0,086	0,086	0,085	0,085
0,081	0,082	0,082	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
0,076	0,077	0,077	0,078	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079
0,072	0,072	0,073	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074
0,068	0,068	0,069	0,069	0,070	0,070	0,070	0,070	0,070	0,070	0,070	0,070	0,070
0,063	0,063	0,064	0,065	0,065	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066	0,067
0,059	0,060	0,061	0,061	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062	0,063	0,063
0,056	0,057	0,057	0,058	0,058	0,058	0,058	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,060
0,052	0,053	0,054	0,054	0,055	0,055	0,055	0,055	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056
0,048	0,049	0,050	0,050	0,051	0,051	0,052	0,052	0,052	0,052	0,053	0,053	0,053
0,043	0,044	0,045	0,046	0,046	0,047	0,048	0,048	0,048	0,048	0,049	0,049	0,049
0,040	0,041	0,042	0,043	0,043	0,044	0,044	0,045	0,045	0,045	0,046	0,046	0,046
0,037	0,038	0,039	0,039	0,040	0,041	0,041	0,041	0,042	0,042	0,043	0,043	0,043
0,034	0,035	0,035	0,036	0,037	0,037	0,038	0,039	0,039	0,039	0,040	0,040	0,040
0,031	0,031	0,033	0,034	0,034	0,035	0,036	0,036	0,036	0,037	0,037	0,037	0,038
0,029	0,030	0,031	0,031	0,032	0,033	0,033	0,034	0,034	0,034	0,035	0,035	0,035
0,027	0,028	0,029	0,029	0,030	0,030	0,031	0,031	0,032	0,032	0,032	0,033	0,033
0,024	0,025	0,026	0,027	0,027	0,028	0,028	0,029	0,029	0,030	0,030	0,030	0,031
0,023	0,024	0,024	0,025	0,025	0,026	0,026	0,027	0,027	0,028	0,028	0,028	0,029
0,021	0,022	0,022	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,026	0,026	0,027
0,018	0,019	0,020	0,020	0,021	0,022	0,022	0,023	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025
0,017	0,018	0,018	0,019	0,020	0,020	0,021	0,021	0,022	0,022	0,022	0,023	0,023
0,015	0,016	0,017	0,017	0,018	0,019	0,019	0,020	0,020	0,021	0,021	0,021	0,022
0,014	0,014	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018	0,019	0,019	0,020	0,020
0,013	0,013	0,014	0,015	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018	0,019
0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017
0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015	0,015	0,016
0,009	0,010	0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013	0,014	0,014	0,015
0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013
0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,012
0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012
0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,009	0,009	0,010	0,010	0,010	0,011
0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010
0,004	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	0,008	0,008	0,009
0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007
0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007
0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007
0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007
0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006
0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006

$\sqrt{\epsilon/r_0}$ y/r_0	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0,0	0,239	0,234	0,230	0,226	0,222	0,218	0,215	0,211	0,207	0,203
0,1	0,238	0,234	0,230	0,226	0,222	0,218	0,215	0,211	0,207	0,203
0,2	0,238	0,233	0,229	0,225	0,221	0,217	0,214	0,210	0,206	0,203
0,3	0,234	0,230	0,226	0,222	0,218	0,214	0,210	0,207	0,203	0,200
0,4	0,230	0,226	0,222	0,218	0,215	0,211	0,207	0,204	0,201	0,197
0,5	0,225	0,221	0,217	0,214	0,210	0,207	0,204	0,200	0,197	0,194
0,6	0,219	0,215	0,211	0,208	0,205	0,201	0,198	0,195	0,192	0,189
0,7	0,212	0,209	0,206	0,202	0,199	0,196	0,193	0,190	0,187	0,184
0,8	0,205	0,201	0,199	0,195	0,193	0,190	0,187	0,184	0,181	0,179
0,9	0,196	0,193	0,190	0,188	0,185	0,182	0,180	0,177	0,174	0,172
1,0	0,188	0,186	0,183	0,181	0,178	0,176	0,174	0,171	0,169	0,167
1,05	0,183	0,181	0,178	0,176	0,174	0,172	0,169	0,167	0,165	0,162
1,1	0,180	0,177	0,175	0,173	0,171	0,168	0,166	0,164	0,162	0,160
1,15	0,173	0,171	0,169	0,167	0,165	0,163	0,161	0,159	0,157	0,155
1,2	0,169	0,167	0,165	0,163	0,161	0,159	0,157	0,155	0,153	0,151
1,25	0,164	0,162	0,160	0,158	0,156	0,155	0,153	0,151	0,149	0,147
1,3	0,159	0,158	0,156	0,154	0,152	0,151	0,149	0,147	0,145	0,144
1,35	0,154	0,152	0,151	0,149	0,147	0,145	0,144	0,142	0,141	0,139
1,4	0,149	0,147	0,146	0,144	0,143	0,141	0,140	0,138	0,137	0,136
1,45	0,145	0,143	0,142	0,140	0,139	0,138	0,136	0,135	0,134	0,133
1,5	0,139	0,138	0,137	0,135	0,134	0,133	0,132	0,131	0,130	0,128
1,55	0,134	0,133	0,131	0,130	0,129	0,128	0,127	0,126	0,125	0,124
1,6	0,129	0,128	0,127	0,126	0,125	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120
1,65	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,118	0,117	0,116	0,115
1,7	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115	0,114	0,113	0,113	0,112	0,111
1,75	0,114	0,113	0,112	0,112	0,111	0,110	0,109	0,109	0,108	0,107
1,8	0,109	0,108	0,107	0,107	0,106	0,105	0,104	0,104	0,103	0,103
1,85	0,104	0,103	0,102	0,102	0,101	0,100	0,100	0,100	0,099	0,099
1,9	0,098	0,098	0,097	0,096	0,098	0,095	0,095	0,095	0,094	0,094
1,95	0,094	0,093	0,093	0,092	0,092	0,091	0,091	0,091	0,091	0,090
2,0	0,089	0,089	0,088	0,088	0,088	0,088	0,087	0,087	0,087	0,087
2,05	0,085	0,085	0,084	0,084	0,084	0,084	0,084	0,083	0,083	0,083
2,1	0,083	0,082	0,082	0,082	0,082	0,082	0,082	0,082	0,082	0,081
2,15	0,079	0,079	0,079	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078
2,2	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074
2,25	0,070	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071
2,3	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,068	0,068	0,068
2,35	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,064	0,064	0,064	0,064	0,064
2,4	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,061	0,061	0,061	0,061	0,062
2,45	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,058	0,058	0,058	0,058
2,5	0,053	0,054	0,054	0,054	0,054	0,054	0,055	0,055	0,055	0,055
2,55	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,051	0,051	0,051	0,052	0,052
2,6	0,047	0,047	0,047	0,048	0,048	0,048	0,049	0,049	0,049	0,050
2,65	0,044	0,044	0,044	0,045	0,045	0,045	0,046	0,046	0,046	0,047
2,7	0,041	0,041	0,042	0,042	0,042	0,043	0,043	0,044	0,044	0,044
2,75	0,038	0,039	0,039	0,039	0,040	0,040	0,041	0,041	0,041	0,042
2,8	0,036	0,036	0,037	0,037	0,037	0,038	0,038	0,039	0,039	0,039
2,85	0,034	0,034	0,034	0,035	0,035	0,036	0,036	0,037	0,037	0,037
2,9	0,031	0,032	0,032	0,033	0,033	0,034	0,034	0,034	0,035	0,035
2,95	0,029	0,030	0,030	0,030	0,031	0,031	0,032	0,032	0,033	0,033
3,0	0,027	0,027	0,028	0,028	0,029	0,029	0,030	0,030	0,031	0,031
3,05	0,025	0,026	0,026	0,027	0,027	0,027	0,028	0,028	0,029	0,029
3,1	0,024	0,024	0,025	0,025	0,026	0,026	0,027	0,027	0,028	0,028
3,15	0,022	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,026	0,026
3,2	0,020	0,021	0,022	0,022	0,022	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025
3,25	0,019	0,020	0,020	0,020	0,021	0,021	0,022	0,022	0,023	0,023
3,3	0,017	0,018	0,018	0,019	0,019	0,020	0,020	0,021	0,021	0,021
3,35	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019	0,020	0,020
3,4	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018	0,018	0,019	0,019
3,45	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017	0,017	0,018
3,5	0,013	0,014	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,016	0,017
3,55	0,012	0,013	0,013	0,014	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016
3,6	0,011	0,012	0,012	0,012	0,013	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015
3,65	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013	0,014
3,7	0,009	0,010	0,010	0,010	0,011	0,011	0,012	0,012	0,012	0,013
3,75	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012
3,8	0,008	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010	0,010	0,011	0,011
3,85	0,007	0,008	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010	0,010	0,010
3,9	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009	0,010
3,95	0,006	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009
4,0	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,008	0,008	0,008	0,008	0,009

1,06	1,07	1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18
0,200	0,197	0,193	0,190	0,187	0,184	0,181	0,178	0,175	0,173	0,170	0,167	0,165
0,200	0,196	0,193	0,190	0,187	0,184	0,181	0,178	0,175	0,173	0,170	0,167	0,165
0,199	0,196	0,193	0,189	0,186	0,183	0,180	0,177	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164
0,197	0,194	0,191	0,188	0,184	0,181	0,178	0,175	0,173	0,170	0,167	0,165	0,163
0,194	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,176	0,173	0,170	0,168	0,165	0,163	0,161
0,191	0,187	0,184	0,182	0,179	0,176	0,173	0,171	0,169	0,165	0,163	0,160	0,158
0,186	0,183	0,180	0,177	0,175	0,172	0,169	0,167	0,164	0,162	0,160	0,157	0,155
0,181	0,179	0,176	0,173	0,171	0,168	0,166	0,163	0,161	0,159	0,157	0,154	0,152
0,176	0,173	0,171	0,169	0,166	0,164	0,162	0,160	0,157	0,155	0,153	0,152	0,149
0,169	0,167	0,165	0,162	0,160	0,158	0,156	0,154	0,152	0,150	0,148	0,146	0,145
0,164	0,162	0,160	0,158	0,156	0,154	0,152	0,150	0,148	0,147	0,144	0,142	0,140
0,160	0,158	0,156	0,154	0,152	0,150	0,148	0,147	0,145	0,143	0,141	0,139	0,137
0,158	0,156	0,154	0,152	0,150	0,148	0,146	0,144	0,142	0,140	0,138	0,137	0,135
0,153	0,151	0,149	0,147	0,146	0,144	0,142	0,140	0,139	0,137	0,135	0,134	0,132
0,149	0,147	0,145	0,144	0,142	0,140	0,139	0,137	0,135	0,134	0,133	0,132	0,130
0,146	0,144	0,142	0,140	0,139	0,137	0,136	0,134	0,133	0,131	0,130	0,128	0,127
0,142	0,141	0,139	0,138	0,136	0,135	0,133	0,132	0,130	0,129	0,128	0,126	0,125
0,138	0,137	0,135	0,134	0,133	0,131	0,130	0,129	0,127	0,126	0,125	0,124	0,122
0,134	0,133	0,132	0,131	0,129	0,128	0,127	0,126	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120
0,132	0,130	0,129	0,128	0,127	0,126	0,125	0,124	0,123	0,122	0,120	0,119	0,118
0,128	0,126	0,126	0,125	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117	0,116
0,123	0,122	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117	0,117	0,116	0,115	0,114	0,113
0,119	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115	0,115	0,114	0,113	0,113	0,112	0,111	0,110
0,115	0,114	0,113	0,113	0,112	0,111	0,111	0,110	0,109	0,109	0,108	0,108	0,107
0,110	0,110	0,109	0,109	0,108	0,107	0,107	0,106	0,106	0,105	0,104	0,104	0,103
0,107	0,106	0,106	0,105	0,105	0,104	0,104	0,103	0,103	0,102	0,101	0,101	0,100
0,102	0,102	0,101	0,101	0,100	0,100	0,100	0,100	0,099	0,099	0,098	0,098	0,097
0,098	0,098	0,098	0,097	0,097	0,096	0,096	0,096	0,095	0,095	0,095	0,094	0,094
0,094	0,093	0,093	0,093	0,093	0,092	0,092	0,092	0,092	0,092	0,091	0,091	0,091
0,090	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090	0,089	0,089	0,089	0,089	0,089	0,088	0,088
0,087	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086	0,085	0,085	0,085	0,085	0,085
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
0,081	0,081	0,081	0,081	0,081	0,081	0,081	0,081	0,081	0,080	0,080	0,080	0,080
0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,077	0,077	0,077
0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074	0,074
0,071	0,071	0,071	0,072	0,072	0,072	0,073	0,072	0,072	0,072	0,072	0,072	0,072
0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,069	0,069	0,069	0,069	0,069	0,069	0,069
0,064	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066	0,067	0,067
0,062	0,062	0,062	0,062	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,064	0,064	0,064	0,064
0,058	0,059	0,059	0,059	0,059	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,061	0,061
0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,057	0,057	0,057	0,057	0,058	0,058	0,059	0,059
0,052	0,053	0,053	0,053	0,053	0,054	0,054	0,054	0,055	0,055	0,055	0,056	0,056
0,050	0,050	0,051	0,051	0,051	0,052	0,052	0,052	0,053	0,053	0,053	0,054	0,054
0,047	0,048	0,048	0,048	0,049	0,049	0,049	0,050	0,050	0,050	0,051	0,052	0,052
0,045	0,045	0,045	0,046	0,046	0,047	0,047	0,047	0,048	0,048	0,048	0,049	0,049
0,042	0,042	0,043	0,043	0,044	0,044	0,045	0,045	0,045	0,046	0,046	0,046	0,047
0,040	0,040	0,041	0,041	0,042	0,042	0,042	0,043	0,043	0,044	0,044	0,044	0,045
0,038	0,038	0,039	0,039	0,039	0,040	0,040	0,041	0,041	0,041	0,042	0,042	0,043
0,036	0,036	0,037	0,037	0,038	0,038	0,038	0,039	0,039	0,040	0,040	0,041	0,041
0,034	0,034	0,034	0,035	0,035	0,036	0,036	0,037	0,037	0,038	0,038	0,038	0,039
0,032	0,032	0,032	0,033	0,033	0,034	0,034	0,035	0,035	0,036	0,036	0,037	0,037
0,030	0,030	0,031	0,031	0,032	0,032	0,032	0,033	0,033	0,034	0,034	0,035	0,035
0,029	0,029	0,029	0,030	0,030	0,031	0,031	0,032	0,032	0,033	0,033	0,034	0,034
0,027	0,027	0,027	0,028	0,028	0,029	0,029	0,030	0,030	0,031	0,031	0,031	0,032
0,025	0,026	0,026	0,027	0,027	0,028	0,028	0,029	0,029	0,030	0,030	0,030	0,031
0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,026	0,026	0,027	0,027	0,028	0,028	0,029	0,029
0,022	0,022	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,026	0,027	0,027	0,028
0,021	0,021	0,022	0,022	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,026	0,026
0,020	0,020	0,021	0,021	0,022	0,022	0,023	0,023	0,023	0,024	0,024	0,025	0,025
0,018	0,019	0,019	0,020	0,020	0,021	0,021	0,022	0,022	0,022	0,023	0,023	0,024
0,017	0,018	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019	0,020	0,020	0,021	0,022	0,022	0,022
0,016	0,017	0,017	0,017	0,018	0,019	0,019	0,019	0,019	0,020	0,020	0,021	0,021
0,015	0,016	0,016	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019	0,020
0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017	0,017	0,018	0,018	0,018	0,019
0,013	0,014	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,016	0,017	0,017	0,018	0,018
0,012	0,013	0,013	0,013	0,014	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,016	0,017
0,012	0,012	0,012	0,013	0,013	0,014	0,014	0,014	0,015	0,015	0,015	0,016	0,016
0,011	0,011	0,012	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013	0,014	0,014	0,014	0,015	0,015
0,010	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013	0,014	0,014
0,009	0,010	0,010	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012	0,012	0,012	0,013	0,013
0,009	0,009	0,009	0,009	0,010	0,010	0,010	0,010	0,011	0,011	0,011	0,011	0,012

Таблица интеграла $\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
0,0	0,0	000	113	226	338	451	564	676	789	901*	013*	113
1	0,1	125	236	348	459	569	680	790	900	009*	118*	111
2	0,2	227	335	443	550	657	763	869	974	079*	183*	106
3	0,3	286	389	491	593	694	794	893	992	090*	187*	100
4	0,4	284	380	475	569	662	755	847	937	027*	117*	93
5	0,5	205	292	379	465	549	633	716	798	879	959	84
6	0,6	039	117	194	270	346	420	494	566	638	708	74
7	—	778	847	914	981	047*	112*	175*	238*	300*	361*	65
8	0,7	421	480	538	595	651	707	761	814	867	918	56
9	—	969	019*	068*	116*	163*	209*	254*	299*	342*	385*	46
1,0	0,8	427	468	508	548	586	624	661	698	733	768	38
1	—	802	835	868	900	931	961	991	020*	048*	076*	30
2	0,9	103	130	155	181	205	229	252	275	297	319	24
3	—	340	361	381	400	419	438	456	473	490	507	19
4	0,95	23	39	54	69	83	97	11*	24*	37*	49*	14
5	0,96	61	73	84	95	06	16*	26*	36*	45*	55*	10
6	0,97	63	72	80	88	96	04*	11*	18*	25*	32*	8
7	0,98	38	44	50	56	61	67	72	77	82	86	6
8	—	91	95	99	03*	07*	11*	15*	18	22*	25*	4
9	0,99	28	31	34	37	39	42	44	47	49	51	3
2,0	0,995	32	52	72	91	09*	26*	42*	58*	73*	88*	17
1	0,997	02	15	28	41	53	64	75	85	95	05*	11
2	0,998	14	22	31	39	46	51	61	67	74	80	8
3	—	86	91	97	02*	06*	11*	15*	20*	24*	28*	5
4	0,999	31	35	38	41	44	47	50	52	55	57	3
5	—	59	61	63	65	67	69	71	72	74	75	2
6	—	76	78	79	80	81	82	83	84	85	86	1
7	—	87	87	88	89	89	90	91	91	92	92	1
8	0,9999	25	29	33	37	41	44	48	51	54	56	3
9	—	59	61	64	66	68	70	72	73	75	77	2

Примечания. 1. Во втором столбце указана часть числа, общая для всех значений по горизонтали.

2. Знак * (например, 901*) показывает, что общая часть этого числа находится ниже на строку. Например: $\Phi(x) = 0,6420$ для $x = 0,65$; $\Phi(x) = 0,7112$ для $x = 0,75$.

3. В последнем столбце (d) указана средняя разность $\Phi(x + 0,01) - \Phi(x)$ для данной строки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, Физматгиз, 1960.
2. Абрамович Г. Н., О смешении турбулентных струй разной плотности, Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1961.
3. Абрамович Г. Н., Прикладная газовая динамика, Гостехиздат, 1951.
4. Альпиньери Л., Турбулентное смешение соосных струй, «Ракетная техника и космонавтика», 1964, № 9.
5. Арсеев А. В., Сжигание природного газа, Metallurgizdat, 1963.
6. Артюх Л. Б., Вулис Л. А., Кашкаров В. П., Ярин Л. П., Тепловые задачи пограничного слоя при гетерогенном и диффузионном горении, Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, Госэнергоиздат, 1963.
7. Арутюнов В. А., О процессах смешения в коаксиальных турбулентных струях и их расчет, Известия вузов, «Черная металлургия», 1963, № 11.
8. Арутюнов В. А., Расчет процессов смешения в коаксиальных турбулентных струях, Известия вузов «Черная металлургия», 1963, № 9.
9. Асакава, Физические методы интенсификации процессов горения, Сб. «Вопросы горения», Metallurgizdat, 1963.
10. Бай-Ши-и, Теория струй, Физматгиз, 1960.
11. Барр Дж., Диффузионные пламена, Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.
12. Блинов В. И., Худяков Г. Н., Диффузионное горение жидкостей, Изд. АН СССР, 1961.
13. Браун В. Г., Пауэлл Н. Н., Принцип подобия смешения и его применение к неоднородному горению, Сб. «Вопросы горения», Metallurgizdat, 1963.
14. Брокау, Герстейн, Диффузионные пламена, Сб. «Основы горения углеводородных топлив», Изд. иностр. лит., 1960.
15. Бурке Э., Дискуссия по статье Саваи И., Куиги М., Жинно Х. «Турбулентные диффузионные пламена», Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.
16. Ван-Драйт Е., Турбулентный пограничный слой в сжимаемых жидкостях, Сб. «Механика», 1952, № 1/11.
17. Власов К. П., Иноземцев Н. Н., Исследование ионизации в гомогенных и турбулентных пламенах, Сб. «Третье Всесоюзное совещание по теории горения», т. 1, Изд. АН СССР, 1960.
18. Войчак В. П., Ершни Ш. А., Исследование турбулентных концентрических струй сжимаемого газа, Труды III совещания по теории и практике сжигания газа, «Недра», 1967.
19. Войчак В. П., Ершни Ш. А., Исследование аэродинамики турбулентного факела, развивающегося в коаксиальной спутной струе конечного размера, Сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», вып. 4, Изд. АН Каз. ССР, 1967.

20. В о л ь К., Ш и п м э н К. У., Диффузионные пламена, Сб. «Процессы горения», Физматгиз, 1961.

21. В у л и с Л. А., Тепловой режим горения, Госэнергоиздат, 1954.

22. В у л и с Л. А., К а ш к а р о в В. П., Теория струй вязкой жидкости, «Наука», 1965.

23. В у л и с Л. А., К а р е л и н В. Е., У с т и м е н к о Б. П., Распространение газовой струи в спутном потоке, «Механика жидкости и газов», 1966, № 3.

24. В у л и с Л. А., Е р ш и н Ш. А., К аэродинамической теории газового факела, Сб. «Третье Всесоюзное совещание по теории горения», т. 2, Изд. АН СССР, 1960.

25. В у л и с Л. А., Закономерности аэродинамики газового факела, Сб. «Теория и практика сжигания газа», Гостехиздат, 1958.

26. В у л и с Л. А., О влиянии пульсаций температуры на скорость турбулентного горения, Известия АН Каз. ССР, серия энергетическая, вып. 1 (5), 1959 (см. также в сборнике — п. 73).

27. В у л и с Л. А., Некоторые вопросы физики горения газа, Сб. «Теория и практика сжигания газа», т. 2, «Недра», 1964.

28. В у л и с Л. А., Термодинамика газовых потоков, Госэнергоиздат, 1950.

29. В у л и с Л. А., О моделировании теплового режима горения с помощью полупроводниковых сопротивлений, Известия АН Каз. ССР, серия энергетическая, вып. 1 (17), 1960.

30. В у л и с Л. А., Е р ш и н Ш. А., Я р и н Л. П., К расчету гомогенного турбулентного газового факела, «Физика горения и взрыва», 1966, № 1.

31. В у л и с Л. А., Я р и н Л. П., Об электромоделировании процесса горения с помощью низкотемпературной плазмы, Инженерно-физический журнал, 1966, № 5.

32. В у л и с Л. А., Интерполяционная формула для переходной области течения, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3.

33. Г а у с о р и В., У и д д е л Д., Х о т т е л Г., Смещение и горение в турбулентных газовых струях, Сб. «Вопросы горения», т. 1., Изд. иностр. лит., 1953.

34. Г л и н к о в М. А., Основы общей теории тепловой работы печей, Металлургиздат, 1959.

35. Г о л ь д е н б е р г С. А., Турбулентный перенос в процессах теплообмена, диффузии и в химических процессах, Известия АН СССР, ОТН, 1960, № 5.

36. Г р у м - Г р ж и м а й л о В. Е., Собрание трудов, под ред. акад. И. П. Бардина, Изд. АН СССР, 1949.

37. Д и м м о к Т., Электрические свойства ионизованных пламен, Сб. «Магнитогидродинамический метод преобразования энергии», Физматгиз, 1963.

38. Д о р о д н и ц ы н А. А., Пограничный слой в сжимаемом газе, «Прикладная математика и механика», т. 6, вып. 6, 1942.

39. Е р ш и н Ш. А., Я р и н Л. П., К расчету диффузионного горения в турбулентном потоке сжимаемого газа, «Научно-технические проблемы горения и взрыва», 1965, № 1.

40. Е р ш и н Ш. А., Р ы б а л о в а Р. П., Я р и н Л. П., К расчету диффузионного факела в переходной области течения, Вестник АН Каз. ССР, 1966, № 9.

41. Е р ш и н Ш. А., Я р и н Л. П., Исследование диффузионных пламен, Сб. «Прикладная теплофизика», Изд. АН Каз. ССР, 1964.

42. Е р ш и н Ш. А., Я р и н Л. П., Исследование аэродинамики турбулентного диффузионного факела, развивающегося в спутном однородном потоке, Инженерный журнал, 1964, № 4.

43. Е р ш и н Ш. А., Я р и н Л. П., Диффузионное горение в ламинарном пограничном слое, «Научно-технические проблемы горения и взрыва», 1965, № 2.

44. Е р ш и н Ш. А., Я р и н Л. П., К расчету турбулентного диффузионного факела, Сб. «Теория и практика сжигания газа», т. 2, «Недра», 1964.

45. З е л ь д о в и ч Я. Б., К теории распространения пламени, Журнал физической химии, т. 22, вып. 1, 1948.

46. З е л ь д о в и ч Я. Б., Теория горения и детонация в газах, Изд. АН СССР, 1944.

47. З е л ь д о в и ч Я. Б., К теории горения неперемешанных газов, Журнал технической физики, т. 19, вып. 10, 1949.

48. И в а н о в Ю. В., Основы расчета и проектирования газовых горелок, Гостехиздат, 1962.

49. И д а Н., Горение в турбулентных газовых потоках, Сб. «Вопросы горения», Металлургиздат, 1963.

50. И л ь я ш е н к о С. М., Т а л а т н и к о в А. В., Теория и расчет прямоточных камер сгорания, «Машиностроение», 1964.

51. И о с т В., Горение и взрывы в газах, Изд. иностр. лит., 1952.

52. К а р л о в и т з Б., Пламя в турбулентном потоке, Сб. «Процессы горения», Физматгиз, 1961.

53. К и т а е в Б. И., Ламинарный факел, «Сталь», 1949, № 5.

54. К л а н ш т е й н, Турбулентное перемешивание сжимаемых жидкостей при наличии пограничного слоя в осесимметричном случае, «Ракетная техника и космонавтика», вып. 4, 1963.

55. К н о р р е Г. Ф., Топочные процессы, Госэнергоиздат, 1959.

56. К н о р р е Г. Ф., А р е ф ь е в К. М., Б л о х А. Г., Н а х а п е т я н Е. А., П а л е е в И. И., Ш т е й н б е р г В. Б., Теория топочных процессов, под ред. Г. Ф. Кнорре и И. И. Палеева, «Энергия», 1966.

57. К у н г и М., Й и н о Н., Турбулентные диффузионные пламена, Сб. «Вопросы горения», Металлургиздат, 1963.

58. Л е в ч е н к о П. В., Исследование горящих факелов генераторного и коксового газа, Сб. «Теплообмен и вопросы экономии топлива в металлургических печах», Металлургиздат, 1951.

59. Л и б б и Р. А., Теоретическое исследование турбулентного смешения реагирующих газов с приложением к сверхзвуковому горению водорода, «Ракетная техника», 1962, № 3.

60. Л ь ю и с Б., Э л ь б е Г., Горение, пламя и взрывы в газах, Изд. иностр. лит., 1948.

61. М и х е л ь с о н В. А., Собрание сочинений, т. 2, изд. «Новый агроном», 1930.

62. М у л л и н е й Г., К и д д П., Д и б е л и у с Н., Электропроводность газовых пламен при больших концентрациях калия, Сб. «Магнитогидродинамический метод преобразования энергии», Физматгиз, 1963.

63. П а л а т н и к И. Б., С м а к о в З., Применение метода эквивалентной задачи теории теплопроводности к изучению затопленной струи, вытекающей из сопла сложной формы, Сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», вып. 3, Изд. АН Каз. ССР, 1966.

64. П о п о в В. А., З и м и н Э. П., Экспериментальное исследование проводимости продуктов сгорания метано-кислородных смесей с добавками щелочного металла, Журнал технической физики, т. 32, вып. 9, 1962.

65. П р у д н и к о в А. Г., Уравнения турбулентного факела, Сб. «Третье Всесоюзное совещание по теории горения», т. 1, Изд. АН СССР, 1960.

66. Р а у ш е и б а х Б. В., Б е л ы й С. А., Б е с п а л о в И. Б., Б о р о д а ч е в В. Я., В о л ы н с к и й М. С., П р у д н и к о в А. Г., Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей, «Машиностроение», 1964.

67. С а в а н И., К у н г и М., Ж и н н о Х., Турбулентные диффузионные пламена, Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.

68. Сб. «Горение в турбулентном потоке», Изд. АН СССР, 1959.

69. Сб. «Исследование горения натурального топлива», под ред. Г. Ф. Кнорре, Госэнергоиздат, 1943.

70. Сб. «Прикладная теплофизика», вып. 1, 2, 3, Изд. АН Каз. ССР, 1965, 1966, 1967.
71. Сб. «Стабилизация пламени и развитие процесса сгорания в турбулентном потоке», Оборонгиз, 1961.
72. Сб. «Теория и практика сжигания газа», вып. 1, Гостоптехиздат, 1964, вып. 2, «Недра», 1966, вып. 3, «Недра», 1967.
73. Сб. «Третье Всесоюзное совещание по теории горения», тт. 1, и 2, Изд. АН СССР, 1960.
74. Свиридов Ю. Б., Шатров Е. В., О применении стереорегистрации при исследовании процессов горения, Изд. АН СССР, 1960.
75. Семенов Н. Н., Цепные реакции, ОНТИ, 1934.
76. Семенов Н. Н., Тепловая теория горения и взрыва, «Успехи физических наук», т. 23, вып. 3, 1940.
77. Скарлок А., Гровер Д. Ж., Распространение турбулентных пламен, Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.
78. Соколик А. С., Самовоспламенение, пламя и детонация в газах, Изд. АН СССР, 1960.
79. Сполдинг Д. Б., Основы теории горения, Госэнергоиздат, 1959.
80. Сполдинг Д. Б., Теория распространения закрытых турбулентных пламен предварительно перемешанных газов, Сб. «Вопросы горения», Металлургиздат, 1963.
81. Старк С. Б., Перемешивание газовых потоков в факеле, Журнал технической физики, т. 23, вып. 10, 1953.
82. Тау И Тунг, Зажигание и горение в ламинарном пограничном слое над горячей поверхностью, Сб. «Вопросы зажигания и стабилизации пламени», Изд. иностр. лит., 1963.
83. Телегин А. С., Китаев Б. И., Влияние состава газа на длину горящего факела, Сб. «Теплообмен и вопросы экономии топлива в металлургических печах», Металлургиздат, 1951.
84. Тимофеев В. Н., Сычев Н. И., Исследование процесса горения газового топлива, Сборник научно-исследовательских работ ВНИИМТ, 1940, № 5.
85. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
86. Тринг М., Ньюбай М., Длина закрытых турбулентных пламен, Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.
87. Франк-Каменецкий Д. А., Диффузия и теплопередача в химической кинетике, Изд. АН СССР, 1947.
88. Франк-Каменецкий Д. А., Ламинарное диффузионное пламя (Дополнение редактора книги Б. Льюиса, Г. Эльбе «Горение, пламя и взрывы в газах»), Изд. иностр. лит., 1948.
89. Хитрин Л. Н., Физика горения и взрыва, Изд. МГУ, 1957.
90. Хитрин Л. Н., Гольдсбергер С. А., Сундуков Н. Н., Закономерности образования фронта пламени в свободной струе, Сб. «Газодинамика и физика горения», Изд. АН СССР, 1959.
91. Хоттел Г., Диффузионное горение ламинарных и турбулентных струй, Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.
92. Хоттел Г., Гаусори В., Диффузия в пламени в ламинарном потоке, Сб. «Вопросы горения», т. 1, Изд. иностр. лит., 1953.
93. Шваб А. В., Связь между температурными и скоростными модами газового факела, Сб. «Исследование процессов горения натурального топлива», под ред. Г. Ф. Кнорре, Госэнергоиздат, 1948.
94. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, Изд. иностр. лит., 1956.
95. Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности, Изд. иностр. лит., 1962.
96. Шолфилд Д., Гарсайд Д. М., Структура и устойчивость диффузионных пламен, Сб. «Вопросы горения», т. 1, Изд. иностр. лит., 1953.

97. Шорин С. Н., Ермолаев О. Н., Характеристики горения и радиации турбулентного газового факела, «Теплоэнергетика», 1959, № 3.
98. Щелкин К. И., Сгорание в турбулентном потоке, Журнал технической физики, т. 13, вып. 9—10, 1943.
99. Щелкин К. И., Трошин Я. К., Газодинамика горения, Изд. АН СССР, 1963.
100. Щетинков Е. С., Физика горения газа, «Наука», 1965.
101. Яжи С., Саджи К., Проблемы турбулентной диффузии и диффузионные пламена, Сб. «Вопросы горения и детонационных волн», Оборонгиз, 1958.
102. Ямке Е., Эмде Ф., Таблицы функций, Гостехиздат, 1948.
103. Ярин Л. П., Тепловой режим горения неперемешанных газов, Известия АН Каз. ССР, серия энергетическая, вып. 1 (19), 1965.
104. Ярин Л. П., К аэродинамическому расчету газового факела в магнитной гидродинамике, «Теплофизика высоких температур», 1965, № 2.
105. Ярин Л. П., К расчету диффузионного горения в пограничном слое высокоскоростного потока, Сб. «Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики», вып. 3, Изд. АН Каз. ССР, 1966.
106. B a r o n T., Reactions in turbulent free jet. The turbulent diffusion flame, Chemical Engineering Progress, v. 50, 1954.
107. B l e v i s s Z. O., Magnetogasdynamics of hypersonic couette flow, Journ. of Aero/Space Sci, № 10, 1958, p. 25 (см. также сб. «Механика», вып. 3 (55), 1959).
108. B u r k e S. P., S c h u m a n n T. E. W., Diffusion flame, Ind. Chem., v. 20, № 10, 1928.
109. C o r r i n S., U b e r o i M. S., Further experiments of the flow and heat transfer in heated turbulent air jet, NACA Report, № 998, 1950.
110. G ö r t l e r H., Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, ZAMM, № 5, Bd. 22, 1942.
111. M a s t e r s J., Some application in physics of the P-function, The Journal of chemical Physics, v. 23, № 10, 1955.
112. M u l l a n e y G. J., K y d d P. H., Journ. of Appl. Phys., № 4, 1961, p. 32.
113. P a b s t O., Die Ausbreitung heißer Gasstrahlen in bewegter Luft, Luftfahrttechnik, Bd. 1960.
114. R e i c h a r d t H., Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz, VDI-Forschungsheft 414, 1942.
115. R o s a P. J., Physical principles of magnetohydrodynamic power generation, The Phys. of Fluids, № 2, 1961, p. 4.
116. R u m m e l K., Der Einfluss des Mischvorganges auf die Verbrennung von Gas und Luft in Feuerungen, Dusseldorf, Arch. Eisenhüttenwesens, № 11, 12, 1937; № 1—5, 1938.
117. W i l l i s D. R., G l a s s m a n J., The mixing of unbounded coaxial compressible streams, Jet Propulsion, v. 27, № 12, 1957.
118. W o h l K., G a r l e a C., K a p p N., Diffusion flames, Third symposium on combustion, flame and explosion phenomena, 1952.
-